INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXV. BAND SECHSTES (SCHLUSS-) HEFT 1957

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 26. September 1957

Postverlagsort Berlin *Preis DM 8.60*

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel,** Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz,** Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter,** Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.

Professor Dr. **E. Mettler,** Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12

Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden,** Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt,** Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen,** Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg — Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin W 35 — Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Inhalt:

Seite

Großmann, G., Experimentelle Durchführung einer neuen hydrodynamischen Analogie für das Torsionsproblem. Mit 10 Abbildungen 381

Klotter, K., und *E. Kreyszig*, Über eine besondere Klasse selbsterregter Schwingungen. Mit 3 Abbildungen 389

Staab, F., Piezoelektrische Geräte zur Bestimmung des Pitotdrucks, des statischen Drucks, des dynamischen Drucks und des Impulses einer pulsierenden Strömung. Mit 16 Abbildungen 404

Trostel, R., Beitrag zur Berechnung räumlich gekrümmter Stäbe nach der Theorie erster Ordnung. Mit 7 Abbildungen 414

Volterra, E., and *E. C. Zachmanoglou*, Free and Forced Vibrations of Straight Elastic Bars According to the "Method of Internal Constraints" 424

INGENIEUR-ARCHIV

XXV. BAND SECHSTES (SCHLUSS-)HEFT 1957

Experimentelle Durchführung einer neuen hydrodynamischen Analogie für das Torsionsproblem *

Von G. Großmann

1. Einleitung. Eine Reihe wichtiger Probleme der Elastizitätstheorie läßt sich mathematisch nur mit hohem Aufwand lösen. Hierzu gehört auch die Bestimmung des Spannungszustandes eines auf Torsion beanspruchten prismatischen Körpers. Die Torsionsspannung läßt sich nur in wenigen Fällen berechnen, so daß schon früh — vor etwa 50 Jahren — Gleichnisse entwickelt wurden, um auf experimentellem Wege zum Ergebnis zu kommen. Die bekanntesten Analogien sind das Membran-Gleichnis (Seifenhaut) von *Prandtl* und das *Thomson*sche Strömungsgleichnis. Vor einigen Jahren veröffentlichte *Pestel*[1] eine neue hydrodynamische Analogie, deren experimentelle Durchführung im folgenden beschrieben wird.

In seiner Arbeit betrachtet *Pestel* die Bewegung einer zähen Flüssigkeit zwischen einer ebenen Scheibe und einer hierzu parallelen Ebene. Bewegt sich die Scheibe unter der Einwirkung einer Kraft P längs einer Normalen auf die Ebene zu, so wird die Flüssigkeit aus dem Spalt h zwischen der Scheibe und der Ebene herausgedrückt.

Die Differentialgleichungen dieser Bewegung liefern folgende Beziehung zwischen dem Druck p unter der Fläche und der im Spalt h zwischen Scheibe und Ebene durchfließenden Flüssigkeitsmenge q:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\,\eta}{h^3}\,q_x\,, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{12\,\eta}{h^3}\,q_y\,. \tag{1}$$

Diese Gleichungen lassen sich unter Benutzung der Kontinuitätsgleichung wie folgt zusammenfassen:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{12\,\eta}{h^3}\,h^{\cdot}\,. \tag{2}$$

Dabei ist η die dynamische Zähigkeit der Flüssigkeit.

Vergleicht man (1) und (2) mit den Differentialgleichungen für die Torsion prismatischer Stäbe nach *de St. Venant*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\tau_{zy}\,, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \tau_{zx}\,, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y} = -2\,G\,\vartheta\,, \tag{4}$$

so kann man auf Grund der Gleichheit des Aufbaues die folgenden Zuordnungen erkennen:

Torsion		Strömung	
$-2\,G\,\vartheta$	$\longrightarrow$	$\frac{6\,\eta}{h^3}\,h^{\cdot}$	(a),
$2\,\varphi$	$\longrightarrow$	p	(b),
$\int_F (\tau_{zx}\,y + \tau_{zy}\,x)\,dF = M_T$	$\rightarrow$	$\int_F p\,dF = P$	(c),
τ_{zy}	$\longrightarrow$	$\frac{6\,\eta}{h^3}\,q_x$	(d),
τ_{zx}	$\longrightarrow$	$-\frac{6\,\eta}{h^3}\,q_y$	(e).

(5)

* Auszug Dissertation Hannover 1957; Referent: Prof. Dr.-Ing. *E. Pestel*, Korreferent: Prof. Dr.-Ing. *E. Martyrer*. Die Arbeit entstand im Festigkeitslaboratorium der TH Hannover.

[1] *E. Pestel*, Ing.-Arch. 23 (1955), S. 172.

2. Aufstellung der Gleichungen für die experimentelle Bestimmung des Torsionswiderstandes. Bei einem prismatischen Körper der Querschnittsfläche F, der sich unter Wirkung der Kraft G in einer Flüssigkeit vom spezifischen Gewicht γ und der dynamischen Zähigkeit η mit der Geschwindigkeit $h^{\cdot}$ bewegt, greifen unter Vernachlässigung von Reibungskräften an den Seitenflächen des Zylinders die in Abb. 1 eingezeichneten Kräfte an. Nach dem *d'Alembert*schen Prinzip läßt sich daraus folgende Differentialgleichung aufstellen:

$$-m\,h^{\cdot\cdot} + P + A - G = 0\,. \tag{6}$$

Darin bedeuten m die Gesamtmasse, die an der Bewegung teilnimmt, G die Kraft, die die Bewegung erzeugt, $A = \gamma\,F\,(H - h)$ den Auftrieb und P die durch die strömende Flüssigkeit hervorgerufene Kraft. Wenn man bedenkt, daß $2\,G\,\vartheta = 2\,M_T/J_D$ gilt, worin J_D der Torsionswiderstand des untersuchten Prismas ist, läßt sich für P aus (5a) und (5c) der folgende Ausdruck ableiten:

$$P = -\frac{3\,J_D\,\eta}{h^3}\,h^{\cdot}. \tag{7}$$

Mit A und P in (6) eingesetzt lautet die Gleichung

$$-m\,h^{\cdot\cdot} - \frac{3\,J_D\,\eta\,h^{\cdot}}{h^3} + \gamma\,F\,(H - h) - G = 0\,. \tag{8}$$

Für diese Differentialgleichung existiert keine geschlossene Lösung. Sie kann deshalb nur numerisch aufgelöst werden.

Eine Voraussetzung für (5) ist das Vorhandensein schleichender Strömung, d. h. die auftretenden Flüssigkeitsbeschleunigungen müssen so klein bleiben, daß die Massenkräfte vernachlässigt werden können. Nach *Pestel* ist diese Bedingung erfüllt, wenn

$$Re = \frac{h\,h^{\cdot}}{\nu} < 0{,}1$$

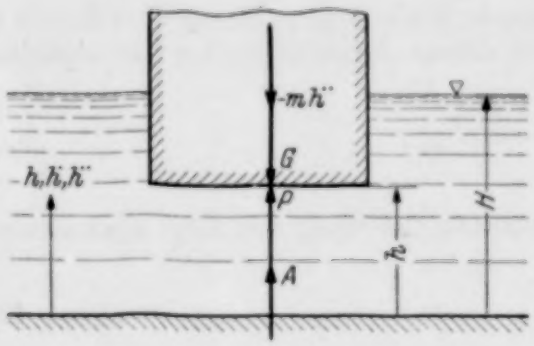

Abb. 1.

ist. Die numerische Auflösung von (8) bestätigte dieses; denn nach einer von der Zähigkeit η des Öles und dem Torsionswiderstand J_D der Fläche F abhängigen Anlaufzeit wurde das Beschleunigungsglied so klein, daß es vernachlässigt werden konnte. Gleichung (8) geht dann über in

$$-h^{\cdot} = \frac{G - (H - h)\,\gamma\,F}{3\,J \cdot \eta}\,h^3\,. \tag{9}$$

Für den Fall, daß man den Auftrieb vernachlässigen kann, nimmt (9) die einfache Form an

$$-h^{\cdot} = \frac{G}{3\,J_D\,\eta}\,h^3\,, \tag{9a}$$

die mit Gleichung (7) übereinstimmt, wenn G durch P ersetzt wird. In dieser Form ermöglicht sie eine schnelle Beurteilung der Versuche, da sie bei Auftragung der Geschwindigkeit $h^{\cdot}$ über der Abszisse h im doppelt-logarithmischen Maßstabe Geraden gleicher Neigung $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}333..$ ergibt. Der Abstand dieser Geraden ist durch den Parameter $G/3\,J_D\,\eta$ gegeben.

Einfacher als die Messung der Geschwindigkeit als Funktion des Weges ist die Weg-Zeit-Messung. Es empfiehlt sich daher, Gleichung (9a) über die Zeit zu integrieren. Daraus erhält man

$$\frac{1}{h_1^3} - \frac{1}{h_0^3} = \frac{2\,G}{3\,J_D \cdot \eta}\,(t_1 - t_0)\,. \tag{10a}$$

Diese Form läßt sich mit den Koordinaten t und h im doppelt-logarithmischen Maßstab auch als Gerade auftragen, deren Gültigkeitsbereich durch die Forderung nach schleichender Strömung gegeben ist.

Für den Fall, daß die Wirkung des Auftriebes nicht vernachlässigt werden darf, kann man Gleichung (9) in die folgende Form umschreiben:

$$-h^{\cdot} = \frac{\gamma\,F\,h^4}{3\,J_D\,\eta} + \frac{P_0\,h^3}{3\,J_D\,\eta}\,. \tag{9b}$$

Darin ist $P_0 = G - \gamma H F$ die Differenz zwischen der Kraft G und dem Auftrieb A bei verschwindender Spalthöhe h. Die Integration von Gleichung (9b) ergibt

$$t_F = t_1 - t_0 = \frac{3 J_D \eta}{2 P_0}\left[\left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_0^2}\right) - \frac{2\gamma F}{P_0}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0}\right) - 2\left(\frac{\gamma F}{P_0}\right)^2 \ln \frac{h_1 (h_0 \gamma F + P_0)}{h_0 (h_1 \gamma F + P_0)}\right]. \quad (10b)$$

In dieser Gleichung kann der dritte Term in der eckigen Klammer vernachlässigt werden, da er ungefähr eine Zehnerpotenz kleiner als der vorhergehende Term ist. Damit lautet Gleichung (10b)

$$t_F = \frac{3 J_D \eta}{2 P_0}\left[\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_0^2} - \frac{2\gamma F}{P_0}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0}\right)\right]. \quad (10c)$$

In dieser Form wurde sie der experimentellen Bestimmung des Torsionswiderstandes zugrunde gelegt.

3. Aufstellung der Gleichungen für die experimentelle Bestimmung der Torsionsspannung. Die Gleichungen (1), (5d) und (5e) sind die Ausgangsgleichungen zur Bestimmung der Torsionsspannung. Es muß daher entweder das Druckfeld oder die Flüssigkeitsmenge q nach Größe und Richtung an jeder Stelle unter der Platte ermittelt werden. Eine Messung des Druckes p während des Bewegungsvorganges wäre experimentell nur mit sehr großem Aufwand und wenig Aussicht auf Genauigkeit möglich gewesen.

Nun ist zu bedenken, daß die Spannungsverteilung lediglich eine Funktion der Querschnittsform ist, oder anders ausgedrückt, daß der Verlauf der Spannungstrajektorien lediglich eine Funktion der Querschnittsberandung ist. Sie sind eindeutig bestimmt, wenn die zu ihnen senkrecht verlaufenden Linien bekannt sind, deren Richtungen im (x, y)-Koordinatensystem durch $-\tau_{zy}/\tau_{zx}$ gegeben ist. Die Gleichungen (5d) und (5e) zeigen, daß diese Richtungen gleich q_y/q_x sind und mit den Stromlinienrichtungen des Strömungsgleichnisses zusammenfallen.

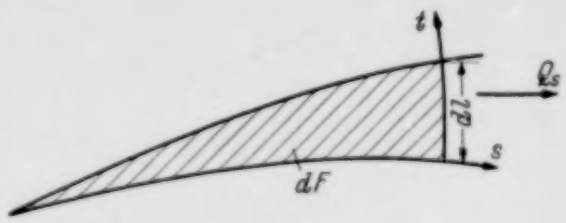

Abb. 2.

Dadurch bietet sich als weiterer Lösungsweg die Bestimmung des Stromliniennetzes an, welches — ebenso wie das Feld der Spannungstrajektorien — nur eine Funktion der Körperform ist. Die hiermit entstandene Möglichkeit, sich bei der Spannungsbestimmung mit Hilfe der Analogie auf die Untersuchung der Kinematik des Strömungsvorganges zu beschränken, wurde durch den Umstand begünstigt, daß der absolute Betrag der Geschwindigkeit den Stromlinienverlauf nicht beeinflußt. Werden diese bei sehr kleinen Geschwindigkeiten der Platte mit Aluminiumpulver sichtbar gemacht, erhält man, wenn die Geschwindigkeit im Laufe der Bewegung bis auf Null herabgesetzt wird, ein stehendes Bild des Liniennetzes, das sich auswerten läßt.

Es ist zweckmäßig, an Stelle des (x, y)-Koordinatensystems ein krummliniges (s, t) zu wählen, bei dem die Richtung s mit der Richtung der Stromlinien zusammenfällt. Dann ist wegen der Definition der Stromlinien $q_t = 0$ und die „Torsionsspannung" $\bar{\tau}$ der Analogie

$$\bar{\tau}_{tz} = \frac{6\eta}{h^3} q_s. \quad (11)$$

Hierbei ist q_s die Flüssigkeitsmenge, die in der Zeiteinheit in Stromlinienrichtung durch die Länge 1, in Spannungsrichtung gemessen, fließt. Die Kontinuitätsgleichung liefert entsprechend Abb. 2

$$q_s = \frac{Q_s}{dl} = \frac{dF\, h^*}{dl}.$$

Setzt man hier für h^* den Wert aus (7) ein, so erhält man

$$q_s = -\frac{dF}{dl}\frac{P h^3}{3 J_D \eta}. \quad (12)$$

Die Gleichungen (11) und (12) ergeben dann

$$\bar{\tau}_{tz} = 2\frac{P}{J_D}\frac{dF}{dl}. \quad (13)$$

Wir definieren nun als bezogene Modellspannung $\bar{\tau}^*$

$$\bar{\tau}^* = \bar{\tau}_{tz}\frac{J_D}{P} = 2\frac{dF}{dl}. \quad (14)$$

Bei einem Kreisquerschnitt würde damit die bezogene Modellspannung am Außenrand

$$\bar{\tau}_a^* = 2\,\frac{\frac{1}{2}\,R\,dU}{dU} = R\,.$$

Vergleicht man diesen Wert mit den wirklich beim Kreisquerschnitt auftretenden bezogenen Spannungen am Außenrand

$$\tau_a^* = \tau_a\,\frac{J_D}{M_T} = R\,,$$

so sieht man sofort, daß die bezogenen Werte völlig übereinstimmen. Dieses gilt nicht nur für den Kreisquerschnitt und nicht nur für den Außenrand sondern für jeden Ort auf beliebigen Querschnittsflächen. Also ist

$$\tau^* = \bar{\tau}^* = \tau\,\frac{J_D}{M_T}\,. \tag{15}$$

Hier zeigt sich die Einfachheit der Analogie. Zur Bestimmung der Torsionsspannung eines beliebig geformten Prismas wird das Stromlinienbild aufgenommen, nach Gleichung (14) die bezogene Modellspannung ermittelt und aus dieser nach Gleichung (15) die wirkliche Spannung errechnet.

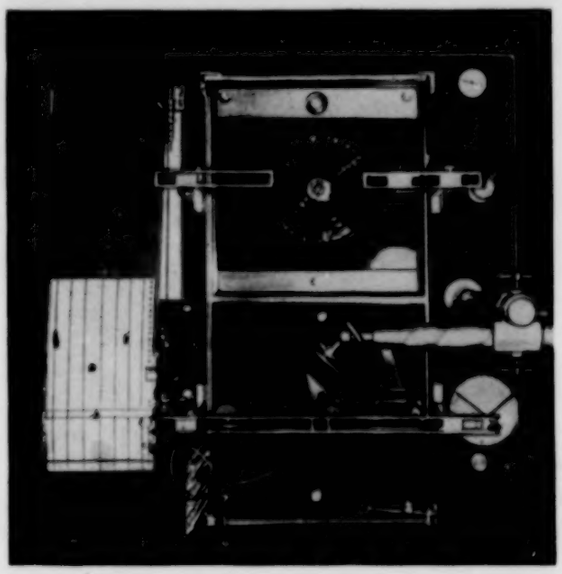

Abb. 3. Versuchsapparatur von oben gesehen.

Da es für die Lage der Stromlinien gleichgültig ist, ob die Platte sich nach oben oder nach unten bewegt, wurde hier im Gegensatz zur Vorgehensart bei der Bestimmung des Torsionswiderstandes der Versuchskörper gehoben; denn so ließen sich die Stromlinien besser sichtbar machen.

4. Beschreibung des Versuchsaufbaues und der Durchführung der Versuche. a) Versuchseinrichtung. Die Versuchsapparatur besteht aus zwei nebeneinanderliegenden Wannen aus Plexiglas. Beide haben einen Einsatz aus Messingblech, der in der Höhe verstellbar ist, so daß diese Platten unabhängig voneinander und unabhängig von den Wannen waagerecht ausgerichtet werden können (Abb. 3). Bei der Bestimmung des Torsionswiderstandes über die Messung der Fallzeit dient die Messingplatte gleichzeitig als Grundkontakt. Der Versuchskörper ist über eine Schnur mit einer Waagschale verbunden, die es ermöglicht, beliebige Werte von P_0 [vgl. (10b)] herzustellen. Eine zweite Schnur führt zu dem Registriergerät, das auf einen Streifen gleichzeitig den Weg und die Zeitmarkierungen aufzeichnet. Eine weitere Führung ist nicht erforderlich, da der Sinkvorgang stabil ist. Die Übersetzung des Weges betrug 4 : 1, d. h. die Höhe wurde vierfach überhöht vom Schreibgerät aufgezeichnet, um den Bereich kleiner Höhen besser auswerten zu können.

Vom Meßschrieb läßt sich die Kurve auf doppelt-logarithmisches Papier übertragen. Dieses ist besonders bei kleinen Werten von h vorteilhaft, da hierdurch die Länge der Kurve reduziert wird. Man kann dann sofort übersehen, ob die Messung mit der Theorie übereinstimmt (Abb. 5).

Ein an einem verstellbaren Stativ befestigter Fotoapparat ermöglicht es, die einzelnen Versuche, besonders aber das Stromlinienbild zur Spannungsbestimmung, bildlich festzuhalten. Versuchsflüssigkeiten sind Cylanto 220 für die Widerstandsbestimmung und ESSTIC 50 für die Herstellung des Stromlinienbildes. Beide Öle wurden freundlicherweise von der ESSO A.G. Hamburg zur Verfügung gestellt. Zwei U-Rohrmanometer gestatten es, während der Versuche mit Hohlquerschnitten den Innendruck zu messen.

Die gesamte Versuchsapparatur ist auf einem Tisch aufgebaut und mit diesem fest verbunden.

b) Versuchskörper. Die Versuche werden mit 12 verschiedenen Querschnittsformen durchgeführt. Diese hatten die in Tabelle 1 angeführten Abmessungen.

Alle Versuchskörper waren aus durchsichtigem Plexiglas hergestellt, bei den Formen 2, 4, 6, 8, 9, 10 und 11 war auf die Fläche ein 12 mm bzw. 15 mm breiter und 12 mm hoher Rand von Plexiglas aufgeleimt worden. Jeder Körper hat an seiner Bodenfläche drei 1 mm lange Stahlspitzen. Sie dienen zur Begrenzung der Sinkzeit, die sonst nach Gleichung (10c) gegen unendlich

gehen würde. Gleichzeitig bilden sie Grundkontakte, die das Aufsetzen auf die Messingplatte auf dem Meßschrieb markieren.

Tabelle 1. (*D = Durchmesser, s = Kantenlänge, δ = Wandstärke*)

1	Kreis 1	D = 150 mm	
2	Kreis 2	D_a = 150 mm	δ = 15 mm (Hohlquerschnitt)
3	Quadrat 1	s = 133 mm	
4	Quadrat 2	s_a = 133 mm	δ = 12 mm (Hohlquerschnitt)
5	Rechteck 1	a = 58 mm	b = 304 mm
6	Rechteck 2	a_a = 58 mm	b_a = 304 mm δ = 12 mm (Hohlquerschnitt)
7	Dreieck 1	s = 202 mm	
8	Dreieck 2	s_a = 202 mm	δ = 12 mm (Hohlquerschnitt)
9	Dreieck 3	s_a = 202 mm	δ = 28 mm (Hohlquerschnitt)
10	Dreieck 4	s_a = 178 mm	δ = 5 mm (Hohlquerschnitt)
11	Dreieck 5	s_a = 140 mm	δ = 12 mm (Hohlquerschnitt)
12	Spiralbohrer	D_a = 150 mm	(vgl. Abb. 9 und 10)

Die Probekörper sind im allgemeinen an drei, die beiden Quadrate an vier Punkten aufgehängt. Die einzelnen Aufhängungen sind in ihrer Länge veränderlich, so daß vor den Versuchen die Grundfläche des Versuchskörpers parallel zum Boden ausgerichtet werden kann.

c) Bestimmung des Torsionswiderstandes (Versuchsergebnisse). In Tabelle 2 sind die Ergebnisse der Versuche zur Bestimmung des Torsionswiderstandes wiedergegeben. Zum Vergleich wurden die errechneten Werte für J_D mit angegeben. Für die Fälle, für die keine exakten Gleichungen zur Berechnung des Torsionswiderstandes vorlagen, wurde dieser näherungsweise nach den *Bredt*schen Formeln ermittelt. Als dritter Wert ist in Tabelle 2 der günstigste Bereich für h_0 angegeben. Die Kenntnis dieses Bereiches ist wichtig. Die Versuche zeigten nämlich, daß der Anlaufvorgang bei den auftretenden Versuchszeiten einen so kleinen Einfluß auf die Gesamtzeit hat, daß er praktisch unberücksichtigt bleiben kann, wenn h_0 sich in den angegebenen Grenzen bewegt.

Der Versuchskörper hat dann bei $h \approx 2$ mm immer die Grenzgerade erreicht, die durch Gleichung (10a) gegeben ist, wenn dort $h_0 = \infty$ gesetzt wird. Das bedeutet, daß die Zeit vom Versuchsbeginn, d. h. dem Loslassen des Körpers, bis zum Versuchsende im Rahmen der Meßgenauigkeit

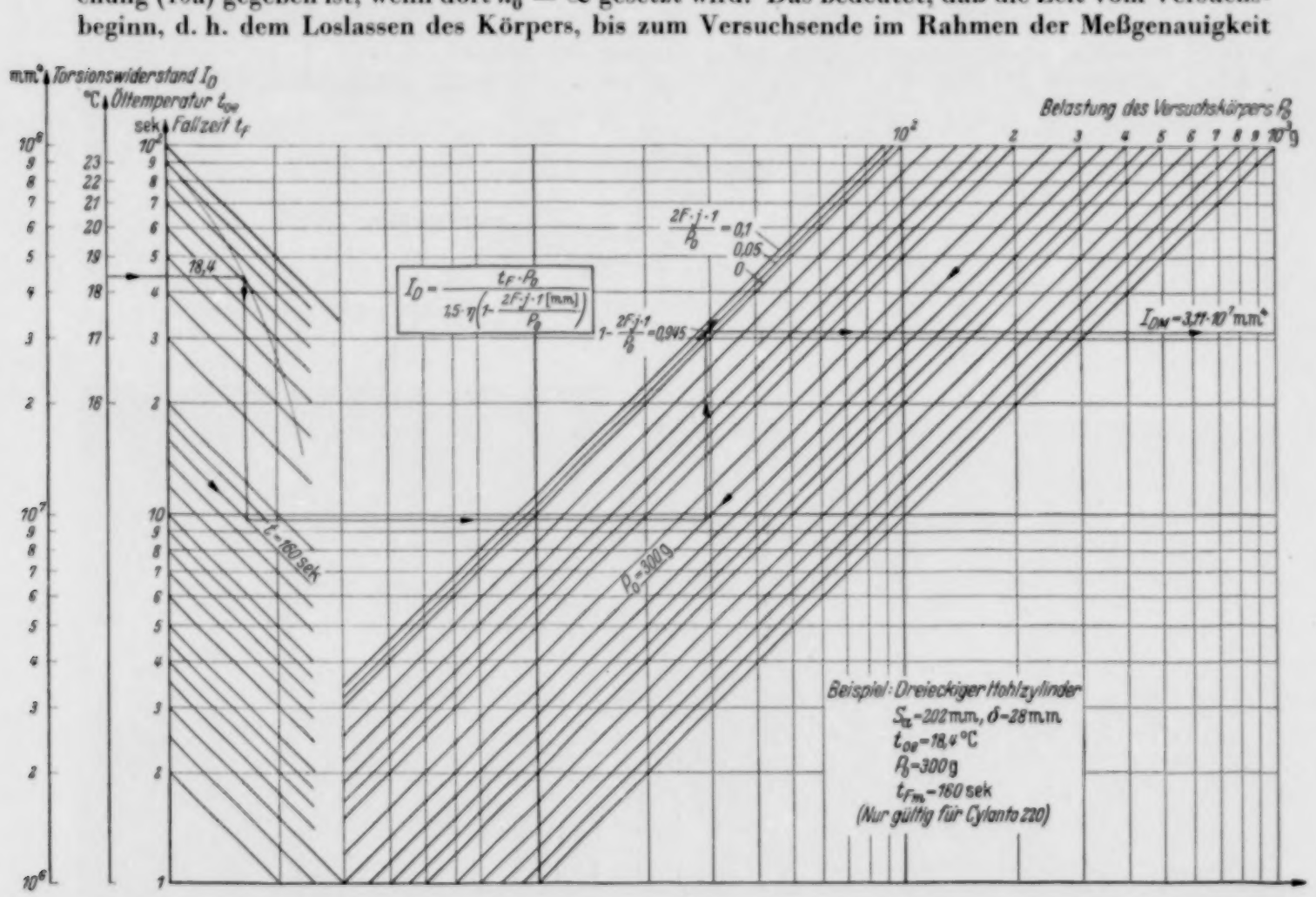
m.m⁴ Torsionswiderstand I_D
°C Öltemperatur t_{Oe}
sek Fallzeit t_f
Belastung des Versuchskörpers P_0
$I_D = \frac{t_F \cdot P_0}{2,5 \cdot \eta \left(1 - \frac{2F \cdot j \cdot 1\,[m.m.]}{P_0}\right)}$
$\frac{2F \cdot j \cdot 1}{P_0} = 0,1$
0,05
0
$1 - \frac{2F \cdot j \cdot 1}{P_0} = 0,945$
$I_{DM} = 3,11 \cdot 10^7$ m.m⁴
18,4
$t_F = 160$ sek
$P_0 = 300$ g
Beispiel: Dreieckiger Hohlzylinder
$S_a = 202$ m.m, $\delta = 28$ m.m
$t_{Oe} = 18,4$ °C
$P_0 = 300$ g
$t_{Fm} = 160$ sek
(Nur gültig für Cylanto 220)

Abb. 4. Bestimmung des Torsionswiderstandes aus Meßwerten. Nur für Cylanto 220 gültig.

unabhängig von der Anfangshöhe h_0 ist. Auf Grund dieser Versuchsergebnisse läßt sich die Gleichung (10c) noch etwas weiter vereinfachen:

$$t_F = \frac{3\,J_D\,\eta}{2\,P_0}\left(\frac{1}{h_1^3} - \frac{2\,\gamma\,F}{P_0\,h_1}\right). \quad (10d)$$

Für die Auswertung dieser Gleichung wurde das in Abb. 4 dargestellte Nomogramm entwickelt.

Bei mehreren Hohlquerschnitten wurde während des Sinkens der Innendruck gemessen; er blieb praktisch während der gesamten Versuchszeit konstant.

Bei den Versuchskörpern 1, 2, 3, 5 und 7, bei denen der Torsionswiderstand noch exakt berechnet werden konnte, lieferte die Messung um 1 bis 3 v. H. zu kleine Werte. Bei den übrigen Körpern waren die Versuchswerte durchweg größer als die errechneten. Dieses ist auch verständlich, denn die Wandstärke war hier bereits so groß, daß sie nicht mehr von einer „Röhre" konstanten Schubflusses ausgefüllt werden konnte. Die *Bredt*sche Formel basiert aber gerade auf dieser Annahme. Der Spiralbohrer konnte mit Versuchswerten von *Quest*[1] ($J_D = 0{,}513 \cdot 10^7$ mm^4) und

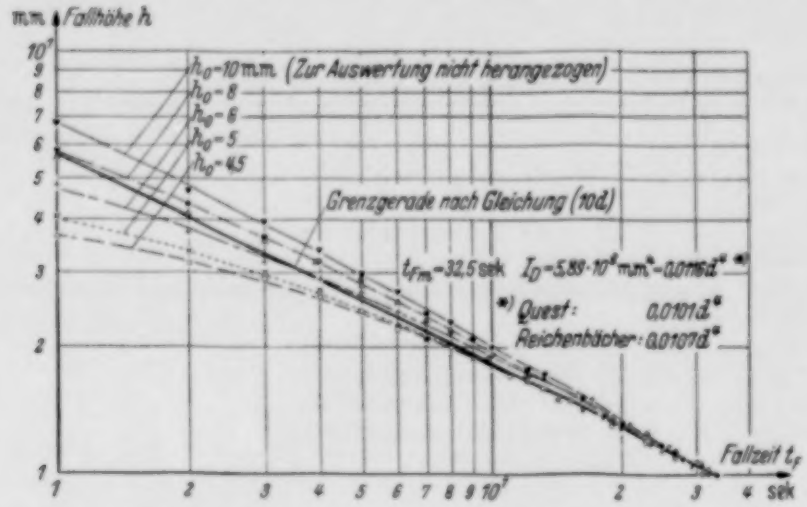

Abb. 5. Bestimmung des Torsionswiderstandes bei einem Spiralbohrer. Cylanto 220, $t_{0\,v} = 19{,}7°$ C, $P_0 = 250$ g.

Tabelle 2

		J_D [mm^4] Torsionswiderstand gemessen	errechnet	Günstiger Bereich für h_0 [mm]
1	Kreis 1	$4{,}78 \cdot 10^7$	$4{,}97 \cdot 10^7$	4—11
2	Kreis 2	$2{,}95 \cdot 10^7$	$2{,}93 \cdot 10^7$	4— 9
3	Quadrat 1	$4{,}30 \cdot 10^7$	$4{,}38 \cdot 10^7$	4—12
4	Quadrat 2	$2{,}26 \cdot 10^7$	$2{,}21 \cdot 10^7$	3— 6
5	Rechteck 1	$1{,}69 \cdot 10^7$	$1{,}73 \cdot 10^7$	4—10
6	Rechteck 2	$1{,}35 \cdot 10^7$	$1{,}28 \cdot 10^7$	4— 6
7	Dreieck 1	$3{,}56 \cdot 10^7$	$3{,}60 \cdot 10^7$	4—11
8	Dreieck 2	$2{,}033 \cdot 10^7$	$1{,}80 \cdot 10^7$	5— 7
9	Dreieck 3	$3{,}10 \cdot 10^7$	$3{,}06 \cdot 10^7$	3— 7
10	Dreieck 4	$0{,}632 \cdot 10^7$	$0{,}611 \cdot 10^7$	3— 7
11	Dreieck 5	$0{,}572 \cdot 10^7$	$0{,}538 \cdot 10^7$	3— 6
12	Spiralbohrer	$0{,}589 \cdot 10^7$		3— 8

[1] *H. Quest*, Ing.-Arch. 4 (1933), S. 510.

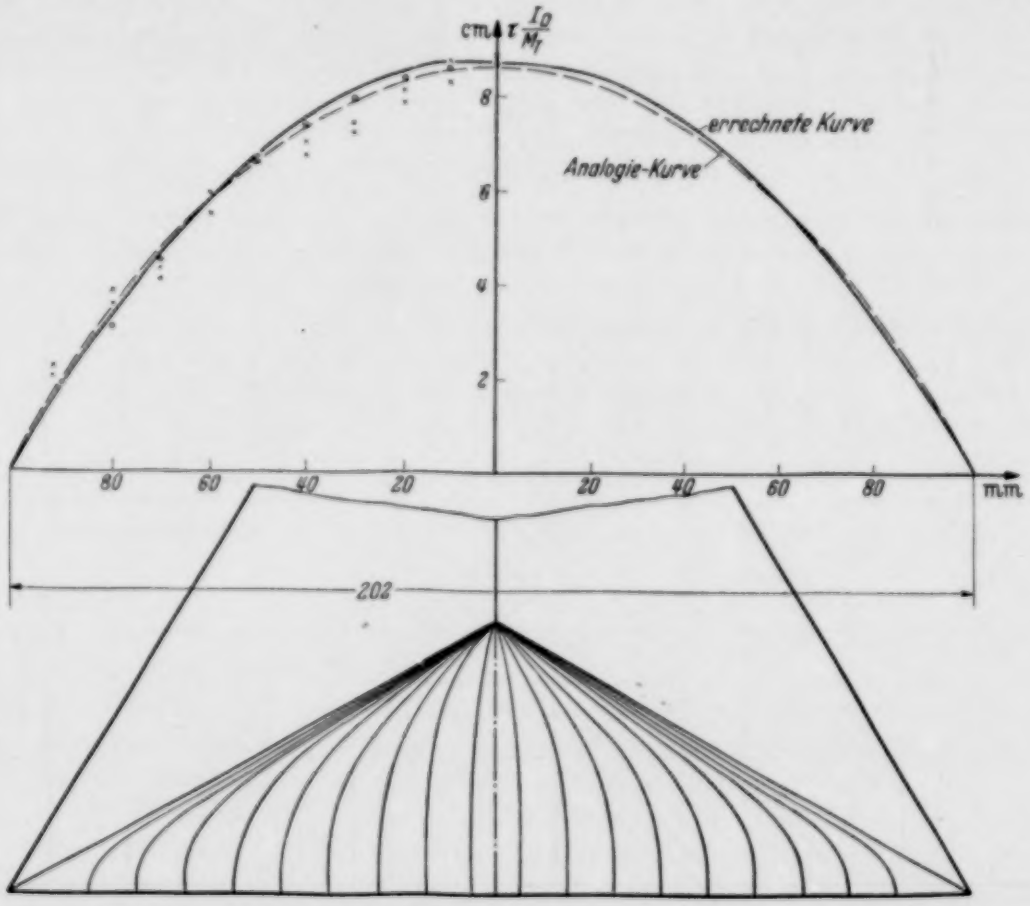

Abb. 6. Spannungsverlauf am Rand des gleichseitigen Dreiecks (oben) und Stromlinienverlauf beim gleichseitigen Dreieck.

Reichenbächer[1] ($J_D = 0{,}544 \cdot 10^7$ mm^4) verglichen werden. Diese Werte wurden früher im Festigkeitslaboratorium der Technischen Hochschule Hannover durch experimentelle Auswertung des Seifenhautgleichnisses gewonnen. Abb. 5 zeigt die Weg-Zeit-Kurven des Spiralbohrers.

d) Bestimmung der Torsionsspannung (Versuchsergebnisse). Beim Kreisquerschnitt wurde erwartungsgemäß ein völlig radialer Verlauf der Stromlinien erzielt. Dieses Ergebnis ist zwar eine Bestätigung der Theorie, sagt aber nur wenig über die Genauigkeit des Verfahrens aus. Dafür lieferte die Untersuchung des Dreiecks 1 bereits ein schärferes Kriterium. Aus den Stromlinien (Abb. 6) wurde eine Kurve der bezogenen Spannung $\bar{\tau}^*$ ermittelt und mit berechneten Werten verglichen. Die Versuchswerte stimmten, wie Abb. 6 zeigt, mit den berechneten Werten gut überein. Dieses war auch beim Quadrat 1 der Fall, wo die größte Spannung nach der Analogie $\bar{\tau}^* = 9{,}05$ cm gegenüber dem rechnerischen Wert $\tau^* = 8{,}95$ cm nur um 1,1 v.H. abwich. Zum Vergleich wurden bei diesem Modell (Abb. 7) die Spannungstrajektorien eingezeichnet und für die äußere Stromröhre die Spannung nach der *Bredt*schen Gleichung

$$\tau\, \delta_{(s)}\, J_D = 2\, M_T\, \frac{F\, m}{\oint \frac{ds}{\delta_{(s)}}}$$

ermittelt und in Abb. 7 eingetragen.

[1] *H. Reichenbächer*, Ing.-Arch. 7 (1936), S. 257.

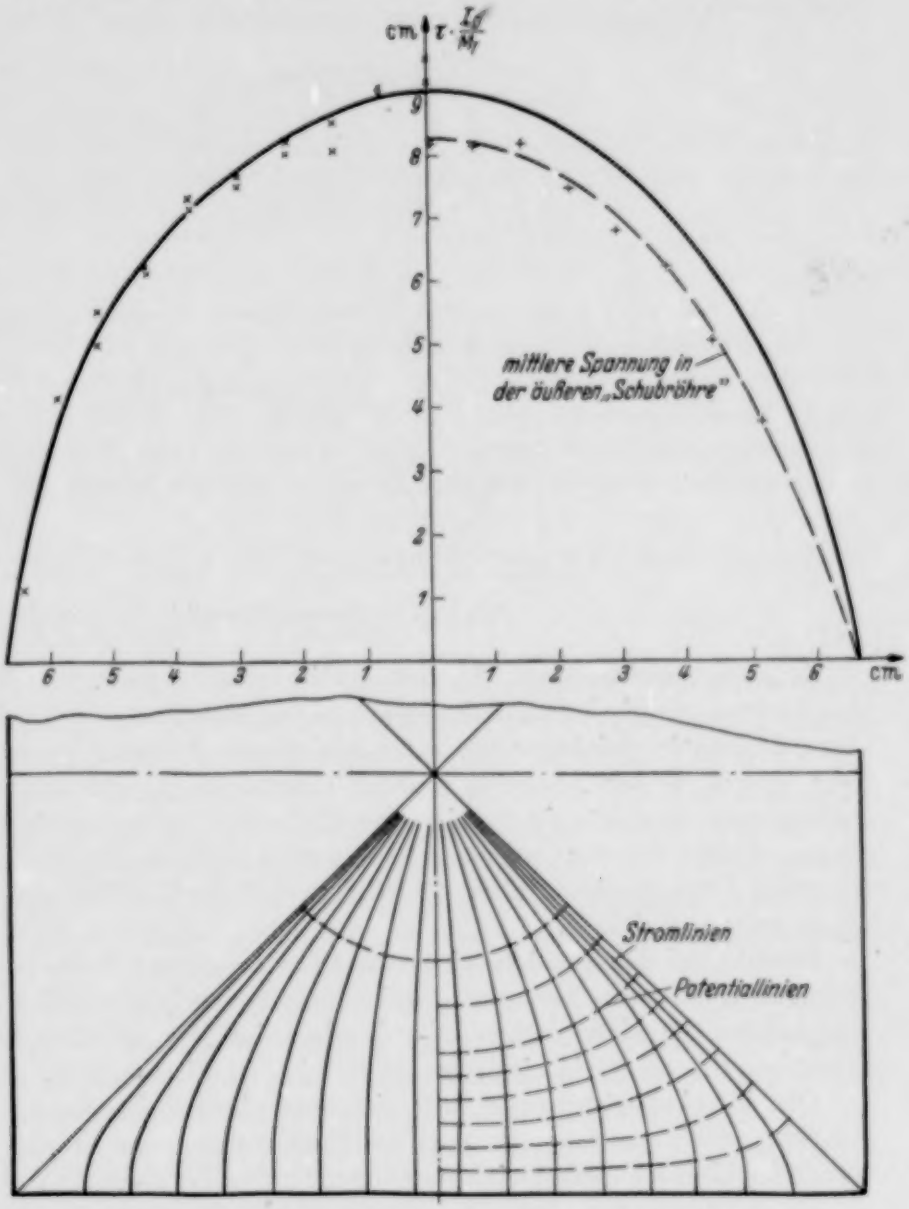

Abb. 7. Spannungs-, Stromlinien- und Potentiallinienverlauf beim Quadrat.

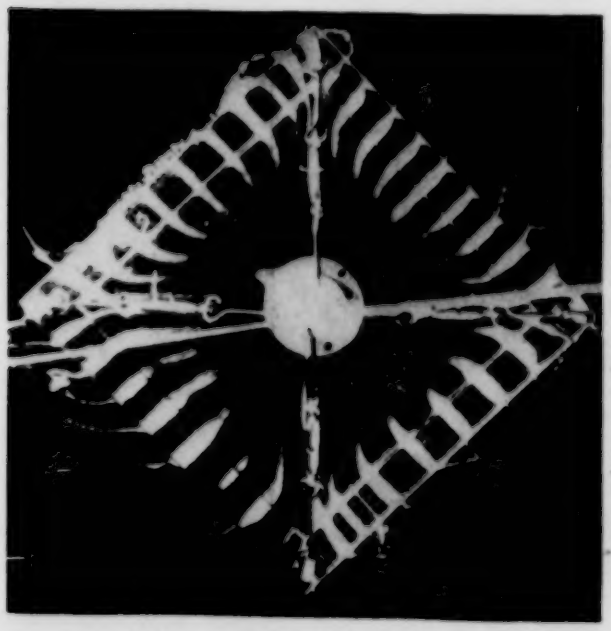

Abb. 8. Stromlinienbild. Quadrat 2.

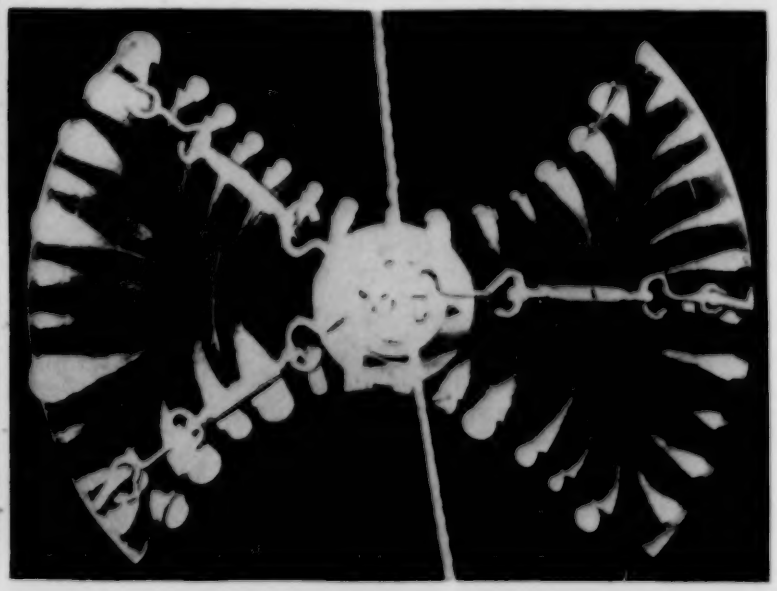

Abb. 9. Stromlinienbild. Spiralbohrer.

Die Auswertung der übrigen Querschnittsformen geschah in gleicher Weise. In Abb. 8 sind z. B. die Stromlinien des Quadrates 2 (Hohlquerschnitt) wiedergegeben. Abb. 9 zeigt die Stromlinien des Spiralbohrers, Abb. 10 die Auswertung dieses Stromlinienbildes. Die größte Spannung betrug hier $\tau_{max} = 0{,}666\, r\, G\, \vartheta$. (*Reichenbächer* ermittelte $\tau_{max} = 0{,}636\, r\, G\, \vartheta$, *Quest* $\tau_{max} = 0{,}68\, r\, G\, \vartheta$.)

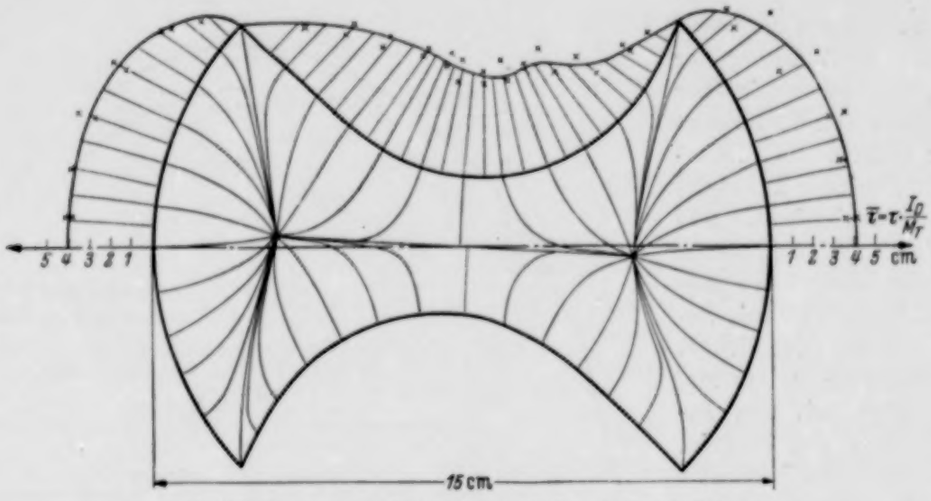

Abb. 10. Spannungs- und Stromlinienverlauf an einem Spiralbohrer.

5. Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit wurde die experimentelle Durchführung des hydrodynamischen Torsionsgleichnisses von *Pestel* beschrieben. Es beruht auf der Gleichheit der Differentialgleichung für die schleichende Strömung und für die *de St. Venant*sche Torsion. Der Vorteil dieser Analogie besteht einmal darin, daß man Torsionswiderstand und Torsionsspannungen unabhängig für sich, jeweils in der dafür günstigsten Art und Weise bestimmen kann. Zum anderen ist der Aufwand an Geräten und an Rechnungsarbeit sehr gering. Für die Auswertung der experimentellen Ergebnisse bei der Ermittlung des Torsionswiderstandes wurde ein Diagramm entwickelt.

Sowohl bei der Torsionswiderstandsbestimmung wie auch bei der Spannungsermittlung wurde eine für technische Zwecke ausreichende Genauigkeit erzielt. Vergleichsmessungen an Flächen mit bekannten Kenngrößen (J_D, τ), die beim *Prandtl*schen Gleichnis z. B. in der *Reichenbächer*-Apparatur noch nötig sind, erübrigen sich in diesem Fall.

Der Torsionswiderstand läßt sich aus einer Zeitmessung und einer Temperaturmessung ermitteln, die Spannung geht auf die Bestimmung der Fläche zwischen zwei Stromlinien zurück. Einfache Umrechnungsgleichungen stellen die Verbindung zwischen Modell und Wirklichkeit her.

(Eingegangen am 23. Dezember 1956.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *G. Großmann*, Vlotho (Weser), Bonneberger Weg 37.

Über eine besondere Klasse selbsterregter Schwingungen

Von **K. Klotter** und **E. Kreyszig**

1. Einleitung und Problemstellung. Das klassische Musterbeispiel eines Systems, das selbsterregte Schwingungen ausführt, ist der sogenannte *van der Pol*sche Schwinger, dessen Verhalten durch die „*van der Pol*sche Differentialgleichung"

$$\ddot{q} - \delta\,\dot{q}\,(1 - \alpha^2 q^2) + \varkappa^2 q = 0 \tag{1.1}$$

beschrieben wird.

Aus der Differentialgleichung (1.1) lassen sich die grundlegenden Eigenschaften dieses Schwingers in einfacher Weise ablesen: Für kleine Werte q ist das zweite Glied („Dämpfungsglied") negativ; dem System wird Energie zugeführt. Für große Werte von q ist das genannte Glied positiv; dem System wird Energie entzogen. Man kann demnach erwarten, daß die sich einstellenden Schwingungen im Laufe der Zeit einem stationären Grenzzustand, einer Grenzschwingung (einem „Grenzzykel") zustreben.

Diese groben Überlegungen lassen sich erstens verfeinern und zweitens auf allgemeinere Differentialgleichungen, von der Form

$$\ddot{q} + \beta\,\dot{q}\,g(q, \dot{q}) + \varkappa^2 f(q) = 0\,, \tag{1.2}$$

ausdehnen. In der Tat bildet das Problem der Existenz und der Eindeutigkeit von Grenzschwingungen bei Systemen, die einer Gleichung von der Form (1.2) genügen, den Gegenstand zahlreicher und ausgedehnter Untersuchungen, von denen ein großer Teil dem Sonderfall (1.1) gewidmet ist. Derartige Betrachtungen haben das Ziel, Bedingungen für die beiden Funktionen $f(q)$ und $g(q, \dot{q})$ anzugeben, die die Existenz — und gegebenenfalls auch die Eindeutigkeit — der Grenzschwingungen sichern. Einen leicht zugänglichen kurzen Bericht hierüber findet man in den Anhängen III und IV des Buches von *J. J. Stoker*[1], wo vor allem Ergebnisse von *N. Levinson* und *O. K. Smith*[2] behandelt werden; eine weiterreichende Darstellung enthält das Buch von *E. A. Coddington* und *N. Levinson*[3].

Es ist klar, daß Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise allein keine oder nur ganz unzureichende Hilfsmittel an die Hand geben, um das Aufschaukeln oder Abklingen der Schwingung zum Grenzzustand hin im einzelnen zu verfolgen. Andererseits sind exakte Lösungen für Gleichungen vom Typ (1.2), die eine solche Aufklärung geben könnten, bisher nicht bekannt geworden. Selbst der klassische, einfache Sonderfall (1.1) der Gleichung (1.2) ist einer exakten Lösung nicht zugänglich. Will man das Verhalten der Lösungen der Gleichung (1.1) oder anderer Sonderfälle der Gleichung (1.2) genauer untersuchen, so ist man auf die Verwendung von Näherungsverfahren angewiesen. Zu diesen Verfahren zählen z. B. die verschiedenen Anwendungsformen der Störungsrechnung, weiterhin Verfahren, die auf dem Gedanken der Variation der Parameter aufbauen und geeignete Vernachlässigungen in sich schließen (wie etwa die Methode von *van der Pol* oder die von *Kryloff-Bogoliuboff*) sowie die (meist graphisch verwertbaren) Hilfsmittel, die die Phasenebene anbietet. Eine kurze Übersicht über derartige Näherungsverfahren findet man z. B. in einem Bericht von *K. Klotter*[4].

Angesichts der soeben geschilderten Lage ist es von Interesse, besondere Typen von (1.2) zu untersuchen, deren Lösungsverhalten analytisch gut erfaßbar ist. Die Differentialgleichung

$$\ddot{q} - (\operatorname{sgn}\dot{q})\,\frac{\beta}{2}\,(1 - \alpha^2 q^2)\,\dot{q}^2 + \varkappa^2 f(q) = 0 \quad \text{mit} \quad \beta > 0\,, \tag{1.3}$$

auf die *K. Klotter*[5] hingewiesen hat, ist von dieser Art. Sie beschreibt einen Schwingungsvorgang, der den durch (1.1) beschriebenen Schwingungen sehr ähnlich ist: Für kleine Werte q wird dem betreffenden System Energie zugeführt, während für große Werte q Energie entzogen wird. Wenn

---

[1] *J. J. Stoker*, Non-linear vibrations. New York 1950.
[2] *N. Levinson* und *O. K. Smith*, Duke Math. Journ. 9 (1942) S. 382.
[3] *E. A. Coddington* und *N. Levinson*, Theory of ordinary differential equations. New York 1955.
[4] *K. Klotter*, Neuere Methoden und Ergebnisse auf dem Gebiet nichtlinearer Schwingungen, VDI-Berichte, Bd. 4 (1955) S. 35.
[5] *K. Klotter*, Journ. Appl. Mech. 22 (1955) S. 493.

auch der Mechanismus des Energieaustausches in seinen Einzelheiten bei beiden Schwingern jeweils verschieden ist, so fällt das Bild des Schwingungsvorganges, im großen betrachtet, in beiden Fällen recht ähnlich aus. Nach einem Vorschlage von *K. Klotter*[1] wollen wir (1.3) deshalb als eine „modifizierte *van der Pol*sche Differentialgleichung" bezeichnen.

Es ist bemerkenswert, daß die Modifikation nicht nur in der Abänderung des Mechanismus für den Energieaustausch besteht, sondern auch darin, daß nun beliebige (und nicht nur lineare) Rückstellkräfte zugelassen sind, da an die Stelle von q im letzten Gliede von (1.1) in (1.3) eine beliebige Funktion $f(q)$ tritt.

Daß die Differentialgleichung (1.3) einer relativ einfachen analytischen Behandlung zugänglich ist, beruht auf dem Umstand, daß diese Gleichung durch Einführung der neuen unabhängigen Veränderlichen $V = \dot{q}^2$ und unter Benutzung der Identität $\ddot{q} = \frac{1}{2}\frac{dV}{dq}$ in eine (abschnittsweise) lineare Differentialgleichung übergeführt werden kann; man erhält nämlich

$$\frac{dV}{dq} - (\operatorname{sgn}\dot{q})\,\beta\,(1-\alpha^2 q^2)\,V + 2\varkappa^2 f(q) = 0\,. \tag{1.4}$$

Die vorliegende Arbeit ist der Behandlung dieser Differentialgleichung gewidmet.

Das Integral von (1.4), das zugleich ein erstes Integral von (1.3) ist, und das zweite Integral von (1.3) lassen sich, von trivialen (und praktisch uninteressanten) Sonderfällen abgesehen, nicht mehr durch eine endliche Anzahl bekannter Funktionen darstellen. Es ist zu erwarten, daß die nachstehend entwickelten Methoden zur Diskussion des ersten und des zweiten Integrals auch in anderen Fällen nützlich sein können, die einer „geschlossenen" Integration nicht mehr zugänglich sind. Abschätzungen, wie sie im folgenden durchgeführt werden, sind oft den üblichen Näherungsverfahren zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen vorzuziehen, insbesondere dann, wenn es sich darum handelt, einen allgemeinen Überblick über den Verlauf eines Schwingungsvorganges zu erhalten.

K. Klotter hat in der schon erwähnten Arbeit[2] die Differentialgleichung

$$\ddot{q} - (\operatorname{sgn}\dot{q})\frac{\beta}{2}\dot{q}^2 + \varkappa^2 f(q) = 0 \tag{1.5}$$

auf ähnliche Weise untersucht. Während, mathematisch gesehen, (1.5) ein Sonderfall von (1.3) ist (der dem Parameterwert $\alpha = 0$ entspricht), sind die durch (1.5) bzw. (1.3) (mit $\alpha \neq 0$) beschriebenen Schwingungssysteme physikalisch durchaus verschieden: Die Differentialgleichung (1.5) beschreibt ein System, dem dauernd Energie entzogen wird; es handelt sich bei ihren Lösungen also einfach um eine Klasse freier gedämpfter Schwingungen, die asymptotisch nach null gehen.

Wir wenden uns nun der Betrachtung der Differentialgleichung (1.3) bzw. (1.4) zu. Eine Zusammenfassung der wesentlichsten Ergebnisse findet sich im Schlußabschnitt **13**.

2. Kurze Diskussion der Differentialgleichung (1.4). Indem wir $2\varkappa^2$ durch γ^2 ersetzen, schreiben wir die Differentialgleichung (1.4) in der folgenden Weise:

$$V' - \beta\,(\operatorname{sgn}\dot{q})\,(1-\alpha^2 q^2)\,V + \gamma^2 f(q) = 0 \quad \text{mit} \quad \beta > 0\,, \tag{2.1}$$

wobei also der Strich die Ableitung nach der unabhängigen Veränderlichen q bezeichnet.

Lassen wir die Bewegung etwa bei einem Ausschlag $q = Q_1 > 0$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{q} = 0$ beginnen, so wird $\dot{q}$ zunächst negativ, und wir erhalten aus (2.1)

$$V' + \beta\,(1-\alpha^2 q^2)\,V + \gamma^2 f(q) = 0\,. \tag{2.2}$$

Diese Differentialgleichung beschreibt die Bewegung, solange die Geschwindigkeit negativ ist. Aber auch bei positiver Geschwindigkeit ergeben sich keine prinzipiellen Änderungen: Durch Darstellung der Funktion $f(q)$ als Summe einer ungeraden Funktion $f_u(q)$ und einer geraden Funktion $f_g(q)$,

$$f = f_u + f_g\,,$$

und Einführung der neuen Variablen $\tilde{q} = -q$ erhalten wir aus (2.1) für den Fall positiver Geschwindigkeit die Differentialgleichung

$$V' + \beta\,(1-\alpha^2 \tilde{q}^2)\,V + \gamma^2 (f_u - f_g) = 0\,, \tag{2.2'}$$

[1] S. Fußnote 5 S. 389.
[2] S. Fußnote 5 S. 389.

in der alle Funktionen von $\tilde{q}$ abhängen und der Strich die Ableitung nach dieser Variablen bezeichnet. Gleichung (2.2′) unterscheidet sich nicht wesentlich von (2.2). Ist $f(q)$ insbesondere eine ungerade Funktion, wie z. B. in dem einfachsten denkbaren Fall der linearen Rückstellkraft, so sind die beiden Differentialgleichungen überhaupt miteinander identisch.

Unter den Funktionen $f(q)$ sind im besonderen diejenigen physikalisch interessant, die „echten" Rückstellkräften entsprechen, d. h. die die Bedingungen

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(a)} & f(q) \geqq 0 & \text{für} \quad q > 0\,, \\ \text{(b)} & f(q) \leqq 0 & \text{für} \quad q < 0\,, \\ \text{(c)} & f(q) \not\equiv 0 & \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

erfüllen.

Die meisten Aussagen, die im weiteren Verlauf der Untersuchung gemacht werden, beziehen sich auf echte Rückstellkräfte, also auf Funktionen $f(q)$, die den Beziehungen (2.3) genügen, ohne daß dies jedesmal angegeben wird. Wo ausnahmsweise von den Beschränkungen (2.3a) und (2.3b) abgesehen wird (wie etwa im zweiten Teil von Abschnitt 7), ist dies ausdrücklich bemerkt.

Ein Wort mag auch am Platze sein über die Dimensionen der in (2.1) auftretenden Größen. Deutet man die Differentialgleichung etwa mechanisch[1], so stellt q im allgemeinen eine Länge oder einen Winkel (im Bogenmaß) dar. Demgemäß erhält man eine der beiden Spalten in der folgenden Liste von Dimensionen:

Entweder	Oder
$\dim q = L$	$\dim q = 1$
$\dim V = L^2\,T^{-2}$	$\dim V = T^{-2}$
$\dim \alpha = L^{-1}$	$\dim \alpha = 1$
$\dim \beta = L^{-1}$	$\dim \beta = 1$
$\dim \gamma = T^{-1}$	$\dim \gamma = T^{-1}$
$\dim f = L$	$\dim f = 1$

Um die Gleichung von den Dimensionen zu befreien, wählt man zwei Bezugsgrößen, q_0 und V_0, und definiert

$$\bar{q} = \frac{q}{q_0}\,, \quad \bar{V} = \frac{V}{V_0}\,, \quad \bar{\alpha} = \alpha\, q_0\,, \quad \bar{\beta} = \beta\, q_0\,, \quad \bar{\gamma}^2 = \gamma^2\,\frac{q_0^2}{V_0}\,, \quad \bar{f} = \frac{f}{q_0}\,.$$

Nach Multiplikation mit q_0/V_0 geht (2.1) in eine Gleichung über, die anstelle von q, V, α, β, γ, f die entsprechenden überstrichenen (also dimensionslosen) Größen enthält. Läßt man dann die Striche der Einfachheit halber wieder weg, so kann man jetzt (2.1) als Gleichung in dimensionslosen Größen ansehen. Von dieser Freiheit werden wir später (Abschn. **6**, **9**, **10**), wo von Beispielen die Rede sein wird, Gebrauch machen, ohne auf die Frage der Dimensionen noch einmal zurückzukommen.

3. Die „Amplitudenbeziehung". Den Maximalausschlag des Abschnitts einer Schwingung vom Ausschlag $q = 0$ bis zum nächsten Durchgang durch $q = 0$ bezeichnen wir (in etwas „liberaler" Sprechweise) kurz als die (positive oder negative) Amplitude dieses Abschnitts (richtiger wäre: Schwingungsweite).

Die Differentialgleichung (2.2) hat die allgemeine Lösung

$$V(q) = -\frac{\gamma^2}{s(q)}\,(I(q) + k)\,, \tag{3.1}$$

wobei

$$I(q) = \int_0^q s(w)\, f(w)\, dw \tag{3.2}$$

ist und

$$s(w) = \exp\,(\beta\, w - c\, w^3) \qquad \text{mit} \qquad c = \frac{\alpha^2\,\beta}{3} \tag{3.3}$$

gilt; k ist eine Integrationskonstante. Das Integral $I(q)$ hängt selbstredend von der jeweiligen Form von $f(q)$ ab. Ist $f(q)$ ein Polynom, so existiert die Lösung V für alle endlichen Werte von q und ist beschränkt.

[1] Beschreibt (2.1) einen Vorgang in einem elektrischen Stromkreis, so daß q eine Stromstärke oder eine Spannung bezeichnet, so kann man eine Befreiung von Dimensionen auf eine analoge Weise erreichen.

Für die von einer Ruhelage $q = Q_1 > 0$ beginnende Bewegung erhalten wir aus (3.1) die partikuläre Lösung

$$V(q) = \frac{\gamma^2}{s(q)} [I(Q_1) - I(q)] . \tag{3.1'}$$

Diese Lösung gilt, solange $\dot{q} < 0$ ist. Wird ein Wert $q = Q_2$ erreicht, für den $V(q)$ erstmals verschwindet, für den also die Beziehung

$$I(Q_1) = I(Q_2) \tag{3.4}$$

erfüllt ist, so ist von diesem Punkte ab bis zur nächsten Nullstelle von $V(q)$ die Lösung der Differentialgleichung (2.2′) zu verwenden, die man aus (3.1) erhält, indem man q durch $\bar{q}$ und f durch $f_u - f_g$ ersetzt. Aus (2.3) folgt, daß $Q_2 < 0$ sein muß.

Mit Hilfe der „Amplitudenbeziehung" (3.4), die zur Differentialgleichung (2.2) gehört, und einer entsprechenden, die zur Differentialgleichung (2.2′) gehört, falls (2.2′) nicht mit (2.2) identisch (also $f(q)$ nicht ungerade) ist, kann man die Folge der Umkehrpunkte ermitteln.

Um die weiteren Darlegungen einfach zu halten, werden wir explizit nur den Fall ungerader $f(q)$ behandeln. Dann sind die Differentialgleichungen (2.2′) und (2.2) und damit die aus ihnen folgenden Amplitudenbeziehungen jeweils identisch. Im Falle nicht ungerader Funktionen $f(q)$ müßte man die beiden Folgen $Q_1, Q_3, Q_5, \ldots$ und $Q_2, Q_4, Q_6, \ldots$ getrennt betrachten. Das Vorgehen ist in diesem Fall jedoch (nach dem, was hier gesagt werden wird) so selbstverständlich, daß wir von einer Besprechung im einzelnen absehen können.

Da eine Schwingung durch die Folge der Amplitudenwerte Q_i weitgehend beschrieben wird, so ist die Amplitudenbeziehung (3.4) wichtig. Wir widmen ihr daher besondere Aufmerksamkeit.

4. Untere Schranken für die „Grenzamplitude" Q^*. Wie einleitend begründet wurde, existieren für die durch die Differentialgleichung (1.4) bzw. (2.1) beherrschte Schwingung zwei Gebiete, die zu unterscheiden sind, nämlich ein Gebiet der Energiezufuhr, das bei kleinen Werten des absoluten Betrages des Ausschlages q liegt, und ein Gebiet des Energieentzuges, das großen Werten des absoluten Betrages von q entspricht. Die Nullstelle $q = |\alpha|^{-1}$ des Koeffizienten des Dämpfungsgliedes von (2.1) bildet die Grenze zwischen den beiden genannten Gebieten.

Im Abschnitt 1 haben wir schon plausibel gemacht, daß die Folge der Beträge der Amplituden Q_i einem Grenzwert Q^* zustrebt; wir wollen diesen Grenzwert als die „Grenzamplitude" bezeichnen. Wenn (für nicht ungerade $f(q)$) zwei getrennte Folgen zu erwarten sind, so strebt jede für sich einem Grenzwert zu. Wir unterdrücken jedoch — wie oben gesagt — die Besprechung dieses Falles, weil er keine weiteren Schwierigkeiten bietet.

Der Beweis für die Existenz eines endlichen Grenzwertes Q^* folgt im nächsten Abschnitt. Hier wollen wir zunächst eine untere Schranke für Q^* angeben.

Zunächst überlegt man sich leicht, daß stets

$$Q^* > |\alpha|^{-1} \tag{4.1}$$

sein muß, falls Q^* existiert. Wäre nämlich $Q^* \leqq |\alpha|^{-1}$, so würde die betreffende Schwingung ausschließlich in dem Energiezufuhrgebiet verlaufen, und ein derartiger Wert Q^* könnte nicht aufrecht erhalten werden.

Wir wollen nun eine schärfere untere Schranke für Q^* herleiten. Hierzu betrachten wir die Amplitudenbeziehung (3.4). Die Nullstellen der Funktion $\beta w - c w^3$ liegen bei 0 und $\pm w_0$, wobei

$$w_0 = +\sqrt{\frac{\beta}{c}} = +\frac{\sqrt{3}}{|\alpha|}$$

ist. Die durch (3.3) definierte Funktion $s(w)$ erfüllt demnach für $-\infty < w < -w_0$ und für $0 < w < w_0$ die Beziehung

$$s(w) > 1 .$$

In den restlichen beiden Intervallen der w-Achse gilt

$$0 < s(w) \leqq 1 .$$

Auf Grund der Voraussetzung, daß $f(q)$ eine ungerade Funktion ist, erhalten wir damit wegen (2.3) die Ungleichung

$$I(-q) < I(q) , \qquad \left(0 < q \leqq +\frac{\sqrt{3}}{|\alpha|}\right). \tag{4.2}$$

Beginnt also die Schwingung bei einem positiven Werte Q_1, der nicht größer als $\sqrt{3}/|\alpha|$ ist, so ist die nächste Amplitude, Q_2, dem Betrage nach stets größer als Q_1.

Demnach ergibt sich: Bei einer Schwingung, die der Differentialgleichung (2.1) gehorcht, gilt für die Grenzamplitude stets die Abschätzung

$$Q^* > \frac{\sqrt{3}}{|\alpha|}. \tag{4.3}$$

Es ist bemerkenswert — und aus der Differentialgleichung (2.1) verständlich — daß die durch (4.3) gegebene Schranke nicht von β abhängt. Weiterhin ersieht man aus (4.3), daß sich die Grenzamplitude Q^* mit abnehmenden Werten von $|\alpha|$ nach größeren Werten verschieben muß; auch dies ist ohne weiteres einleuchtend. Strebt α gegen null, so muß Q^* gegen unendlich streben, d. h. es existiert dann keine endliche Grenzamplitude mehr.

5. Die Beschränktheit der Amplituden Q_j und die Existenz der Grenzamplitude Q^*. Die Amplituden Q_2, Q_3, ... einer Schwingung, die der Differentialgleichung (2.1) mit einem Polynom $f(q)$ entspricht, sind (für jede noch so groß gewählte Anfangsauslenkung Q_1) beschränkt.

Diese Aussage ist, vom Standpunkt der Mechanik gesehen, fast selbstverständlich; sie läßt sich in einfacher Weise auch formal bestätigen. Ist nämlich $f(q)$ ein Polynom, so gilt wegen (2.3)

$$\lim_{q \to -\infty} f(q)\, s(q) = -\infty, \qquad \lim_{q \to \infty} f(q)\, s(q) = 0.$$

Und zwar wächst die Funktion $f(q)\, s(q)$ für große negative Werte von q dem Betrage nach sehr stark an, während sie für wachsende positive q sehr rasch gegen null strebt. Hieraus folgt unmittelbar die Richtigkeit der obigen Aussage für endliche Werte von Q_1. Zu zeigen ist noch, daß $I(q)$, wenn $f(q)$ ein Polynom ist, auch für beliebig wachsendes positives q beschränkt bleibt. Von einem gewissen, von β und c abhängigen Werte $q = a > 0$ an ist $\beta q - c q^3 < -q$. Da weiterhin $I(q)$ für endliche Werte $|q|$ beschränkt ist, so existiert eine (von β, c und $f(q)$ abhängige) Konstante $M\,(< \infty)$ derart, daß

$$I(a) < M + \int_0^a e^{-w} f(w)\, dw$$

gilt. Indem wir $f(q)$ in der Form

$$f(q) = \sum_{m=0}^{n} a_m q^m \tag{5.1}$$

schreiben, erhalten wir demnach

$$\lim_{q \to \infty} I(q) < M + \lim_{q \to \infty} \int_0^q e^{-w} \sum_{m=0}^{n} a_m w^m\, dw = M + \sum_{m=0}^{n} a_m \Gamma(m+1) < \infty, \tag{5.2}$$

was zu zeigen war.

Auf Grund von (2.3) ist $I(q)$ für $0 \leqq q < \infty$ und auch für $0 \geqq q > -\infty$ eine monotone Funktion von q. Hieraus ergibt sich: Im Falle einer ungeraden Rückstellkraft ist die Folge der Beträge der Amplituden $|Q_1|, |Q_2|, \ldots$, monoton.

Damit erhalten wir zusammenfassend das Ergebnis: Im Falle einer ungeraden Rückstellkraft existiert für jeden Wert $\alpha \neq 0$ eine (endliche) Grenzamplitude Q^*.

Ferner gilt demnach für zwei aus verschiedenen positiven Ruhelagen beginnende Schwingungen: Mit $Q_1 > \hat{Q}_1$ ist auch $|Q_j| > |\hat{Q}_j|$ für alle Werte $j = 2, 3, \ldots$.

6. Weitere Eigenschaften der Amplituden Q_j. Es ist klar, daß die einer gewissen festen Anfangsamplitude Q_1 entsprechende nächste Amplitude von der Größe der in der Differentialgleichung (2.1) enthaltenen Konstanten abhängen muß, also von α, β und den in $f(q)$ enthaltenen Koeffizienten. Daß der Wert von γ belanglos ist, sieht man aus (3.2) und (3.4). Wir wollen die genannte Abhängigkeit nun etwas näher untersuchen.

Führen wir in (2.2) die neue Variable

$$x = \beta q \tag{6.1}$$

ein, so erhalten wir im Falle einer der Funktion

$$f(q) = q^{2m+1} \tag{6.2}$$

entsprechenden Rückstellkraft die Differentialgleichung

$$\frac{dV}{dx} + (1 - u^2 x^2)\, V + \gamma^2 \beta^{-2m-2}\, x^{2m+1} = 0 \quad \text{mit} \quad u = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{6.3}$$

Für eine von der Ruhelage $x = \beta Q_1 \equiv X_1 > 0$ aus beginnende Schwingung ergibt sich die Sonderlösung

$$V(x) = \gamma^2 \beta^{-2m-2}\, e^{-(x - u^2 x^3/3)} [J(X_1) - J(x)], \tag{6.4}$$

wobei

$$J(x) = \int_0^x e^{w - u^2 w^3/3}\, w^{2m+1}\, dw \tag{6.5}$$

ist. Die (3.4) entsprechende Amplitudenbeziehung lautet nun:

$$J(X_1) = J(X_2). \tag{6.6}$$

Da das Integral $J(x)$ außer dem festen Parameter m nur den Parameter $u = \alpha/\beta$ enthält, also bei Vorgabe eines gewissen Wertes von u wohlbestimmt ist, so hängt das Amplitudenverhältnis

$$\frac{|X_1|}{|X_2|} = \frac{|\beta Q_1|}{|\beta Q_2|} = \frac{|Q_1|}{|Q_2|}$$

nur von u ab. Entsprechend schließt man für die weiteren Amplituden. — Es ist

$$z(u, w) = \exp(w - u^2 w^3/3)$$

für jeden festen Wert $w > 0$ (bzw. $w < 0$) eine mit wachsendem u monoton fallende (bzw. wachsende) Funktion. Demnach nimmt $J(x)$ bei monoton wachsendem u für jeden (festen) positiven Wert von x monoton ab und für jeden (festen) negativen Wert von x monoton zu.

Es gilt also: Im Falle einer Rückstellkraft, die einer Funktion von der Form (6.2) entspricht, ist das Verhältnis $|Q_n|/|Q_{n+1}|$ der Beträge zweier aufeinanderfolgender Amplituden nur von dem Parameter

$$u = \frac{\alpha}{\beta} \tag{6.7}$$

abhängig und wächst monoton mit wachsendem u.

Die Größe u bezeichnen wir als den wesentlichen Parameter eines durch die Differentialgleichung (2.1) beschriebenen Schwingers.

7. Obere Schranken für die Grenzamplitude Q^*. Wie gezeigt wurde, existiert für $\alpha \neq 0$ und ungerades $f(q)$ eine (endliche) Grenzamplitude, und die Funktion $I(q)$, vgl. (3.2), ist monoton.

Im folgenden benötigen wir Schranken für $I(q)$. Wir geben solche für den Fall an, daß $f(q)$ ein Polynom von der Form (5.1) mit nichtnegativen Koeffizienten ist. Die im Integranden von $I(q)$ auftretende Funktion $\exp(\beta w)$ wird durch ihren kleinsten bzw. größten Wert im Integrationsintervall ersetzt. Es ist

$$\int_0^q e^{-c w^3}\, w^m\, dw = \frac{1}{3}\, c^{-(m+1)/3}\, P\left(\frac{m+1}{3}, c\, q^3\right), \tag{7.1}$$

wobei

$$P(m, x) = \int_0^x e^{-w}\, w^{m-1}\, dw \tag{7.2}$$

die unvollständige Gammafunktion bezeichnet. So ergibt sich unmittelbar die Abschätzung

$$A(q) < I(q) < e^{\beta q} A(q) \quad \text{für} \quad q > 0 \tag{7.3}$$

mit

$$A(q) = \frac{1}{3}\, c^{-1/3} \sum_{m=0}^{n} c^{-m/3}\, a_m\, P\left(\frac{m+1}{3}, c\, q^3\right).$$

Wir geben nun obere Schranken für die Grenzamplitude Q^* an. Hierzu betrachten wir die Amplitudenbeziehung (3.4), und zwar der Einfachheit halber für die spezielle ungerade Funktion

$$f(q) = q^{2m+1} \quad (m = 0, 1, \ldots). \tag{7.4}$$

(Die nun folgende Überlegung läßt sich auch für andere Rückstellkräfte durchführen; jedoch ergeben sich dann kompliziertere Formeln.) Wir bestimmen einerseits eine obere Schranke $K(q)$ von $I(q)$, $q > 0$, und andererseits eine untere Schranke $L(q)$ von $I(-q)$. Dann gilt

$$I(q) - I(-q) < K(q) - L(q) \quad \text{für} \quad q > 0\,. \tag{7.5}$$

Wegen (4.2) ist die linke Seite von (7.5) für hinreichend kleine Werte $q(>0)$ stets positiv. Demnach ist auch die rechte Seite von (7.5) für solche Werte q von null verschieden. Bestimmt man die Schranken $K(q)$ und $L(q)$ so vorsichtig, daß einerseits $K(q)$ für große q langsam und monoton anwächst und andererseits $L(q)$ für große q ein rasches monotones Wachstum besitzt — beides ist auf Grund des Wachstumsverhaltens von $I(q)$ und $I(-q)$ möglich —, so hat die Gleichung

$$K(q) - L(q) = 0 \tag{7.6}$$

für große Werte von $q(>0)$ genau eine Nullstelle, und diese Nullstelle ist eine obere Schranke für Q^*.

Wegen (7.3) und (7.4) ist

$$I(q) < \frac{1}{3}\, c^{-2(m+1)/3}\, P\left(\frac{2}{3}(m+1), c\,q^3\right) e^{\beta q} \quad \text{für} \quad q > 0$$

und

$$I(-q) > \frac{1}{3}\, c^{-2(m+1)/3}\, P\left(\frac{2}{3}(m+1), -c\,q^3\right) e^{-\beta q} \quad \text{für} \quad q > 0\,.$$

Also wird

$$I(q) - I(-q) < \frac{1}{3}\, c^{-2(m+1)/3}\left(e^{\beta q}\, P\left(\frac{2}{3}(m+1), c\,q^3\right) - e^{-\beta q}\, P\left(\frac{2}{3}(m+1), \ -c\,q^3\right)\right).$$

Die Gleichung (7.6) hat demnach im vorliegenden Falle die Gestalt

$$e^{2\beta q}\, P\left(\frac{2}{3}(m+1), c\,q^3\right) = P\left(\frac{2}{3}(m+1), -c\,q^3\right), \tag{7.6'}$$

und die Nullstelle $q = q_0$ dieser Gleichung ist auf Grund der vorstehenden Überlegung eine obere Schranke für die Grenzamplitude Q^* des betrachteten Schwingers.

Gleichung (7.6′) läßt sich durch Anwendung der Funktionalbeziehung der unvollständigen Gammafunktion,

$$P(m+1, x) = m\, P(m, x) - e^{-x}\, x^m,$$

einfach handhaben. Wegen

$$P(1, x) = 1 - e^{-x}$$

braucht man insgesamt nur die Werte der P-Funktion für die Parameter $m = 1/3$ und $m = 2/3$ zu kennen, um (7.6′) auszuwerten. Diese Auswertung geschieht am einfachsten durch graphische Ermittlung des Schnittpunktes der Kurven, die den Funktionen auf den beiden Seiten von (7.6′) entsprechen. Wenn nötig, verbessert man diesen Wert mit Hilfe eines der üblichen Näherungsverfahren.

Für den soeben behandelten Fall (und ähnliche Fälle) lassen sich auch solche oberen Schranken von Q^* finden, bei denen man nur elementare Funktionen zu betrachten braucht. Dies soll nun gezeigt werden.

Die Funktion $f(q)$ habe die Form (7.4). Wir bestimmen wiederum eine obere Schranke von $I(q)$ für $q > 0$, und eine untere von $I(-q)$ und verfahren dann weiter wie oben. Wegen (2.3) und (5.2) gilt im vorliegenden Fall

$$I(q) < \lim_{q \to \infty} I(q) < \infty \quad \text{für} \quad q > 0\,,$$

und wir können sogar eine von q unabhängige obere Schranke für $I(q)$ angeben. Daß eine derartige Abschätzung relativ roh ist, wird sich auf das Endergebnis nicht sonderlich auswirken, da $I(-q)$ für wachsende Werte von $q(>0)$ sehr rasch anwächst.

Wegen (7.4) ist

$$I(q) = \int_0^q s(w)\, w^{2m+1}\, dw\,.$$

In geeigneten Intervallen der w-Achse kann die Funktion $s(w)$ bei den vorzunehmenden Abschätzungen durch die Funktion

$$r(w) = e^{-\beta w}$$

ersetzt werden. Für $w = 0$ und $w = \pm W$, wobei $W = +\sqrt{6}/|\alpha|$ ist, gilt $r(w) = s(w)$. In den Intervallen $-W < w < 0$ und $w > W$ ist demnach

$$r(w) > s(w)\,,$$

während in den restlichen beiden Intervallen der w-Achse

$$r(w) \leqq s(w)$$

gilt. Wegen

$$e^{-\beta\alpha^2 w^2/3} < 1 \qquad (w > 0, \beta > 0)$$

erhalten wir demnach

$$I(q) = I(W) + \int_W^q s(w)\, w^{2m+1}\, dw < \int_0^W e^{\beta w}\, w^{2m+1}\, dw + \int_0^\infty e^{-\beta w}\, w^{2m+1}\, dw \qquad (q > 0)$$

und weiterhin

$$I(-q) > \int_{-W}^{-q} s(w)\, w^{2m+1}\, dw > \int_{-W}^{-q} e^{-\beta w}\, w^{2m+1}\, dw \qquad (q > 0)\,,$$

also insgesamt

$$I(q) - I(-q) < \int_0^W e^{\beta w}\, w^{2m+1}\, dw + \frac{(2m+1)!}{\beta^{2m+2}} - \int_{-W}^{-q} e^{-\beta w}\, w^{2m+1}\, dw\,.$$

Durch Auswertung der Integrale ergibt sich hieraus

$$\frac{\beta^{2m-2}}{(2m+1)!}\,(I(q) - I(-q)) < e^x\, h_m(x) - 2\, e^p\, h_m(p) + 1\,,$$

wobei

$$x = \beta q\,, \qquad p = \beta W = +\frac{\sqrt{6}\,\beta}{|\alpha|} \tag{7.7}$$

und

$$h_m(z) = \sum_{s=0}^{2m+1} (-1)^s \frac{z^s}{s!} \tag{7.8}$$

ist. Da wir bei unserer Abschätzung das Integral $I(q)$ durch das Integral $\lim_{q\to\infty} I(q)$ ersetzt haben, so gewinnen wir eine obere Schranke nicht nur für die Grenzamplitude Q^*, sondern sogar für den Betrag einer jeden Amplitude Q_n, $n > 1$.

Das Ergebnis ist: Im Falle einer Rückstellkraft, die der Funktion

$$f(q) = q^{2m+1} \qquad (m = 0, 1, \ldots)$$

entspricht, ist die Wurzel $x = x_0$ der Gleichung

$$e^x\, h_m(x) = 2\, e^p\, h_m(p) - 1 \tag{7.9}$$

eine obere Schranke für $\beta|Q_n|$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Hierbei ist p durch (7.7) und h_m durch (7.8) gegeben.

Die Gleichung (7.9) kann z. B. mit Hilfe der *Newton*schen Näherungsmethode behandelt werden, wobei man zweckmäßigerweise $x = p$ als Ausgangswert wählt.

Der Fall der linearen Rückstellkraft entspricht dem Werte $m = 0$. Die Gleichung (7.9) hat dann die Form

$$e^x\,(x - 1) = 2\, e^p\,(p - 1) + 1\,, \tag{7.9'}$$

und dies läßt sich, da p stets positiv ist, durch die noch einfachere Gleichung

$$e^x\,(x - 1) = 2\, p\, e^p \tag{7.9''}$$

ersetzen.

Das soeben behandelte Verfahren kann ohne weiteres auf den allgemeinen Fall übertragen werden, wo $f(q)$ ein ungerades Polynom mit positiven Koeffizienten ist. Man hat dann das Integral $I(q)$ in eine Summe von Integralen zu zerlegen, deren jedes jeweils genau einen Summanden der Funktion $f(q)$ im Integranden enthält, und kann diese Integrale auf die soeben angegebene Weise abschätzen. Zu beachten bleibt lediglich, daß bei der Auswertung der Integrale verschiedene Potenzen von β auftreten und diese somit zum Teil in die zu (7.9) analoge Gleichung eingehen.

Wir betrachten hierzu den praktisch wichtigen Fall

$$f(q) = q + \mu^2 q^3 .$$

Da $f(q)$ aus zwei Summanden besteht, ist $I(q)$ in zwei Integrale aufzuspalten, und diese sind einzeln abzuschätzen. Als obere Schranke für βQ^* erhält man in diesem Falle die Wurzel $x = x_0$ der folgenden Gleichung:

$$e^x h^*(x) = 2 e^p h^*(p) + \beta^2 + 6\mu^2; \tag{7.10}$$

hierbei ist

$$h^*(z) = \beta^2 (z - 1) + \mu^2 (z^3 - 3 z^2 + 6 z - 6) ,$$

und p ist durch (7.7) gegeben. Diese Gleichung läßt sich ähnlich wie (7.9) lösen.

Bisher haben wir ausschließlich echte Rückstellkräfte (vgl. (2.3)) betrachtet, da diese vor allem von praktischer Bedeutung sind. Wir zeigen nun, daß man auch im Falle eines beliebigen ungeraden Polynoms $f(q)$ in ähnlicher Weise eine obere Schranke für Q^* bestimmen kann.

Man denke sich $I(q)$ in eine Summe von Integralen zerlegt, deren jedes genau einem Glied des Polynoms $f(q)$ entspricht. Es sei $I^+(q)$ bzw. $I^-(q)$ die Summe aller Glieder dieser Zerlegung, die (für $q > 0$) einen positiven bzw. einen negativen Wert haben; offenbar sind das die Integrale, die einem Glied von $f(q)$ mit positivem bzw. mit negativem Koeffizienten entsprechen. Man hat dann

$$I(q) = I^+(q) + I^-(q) .$$

Entsprechend zerlegt man $I(-q)$. Es sei $J^+(-q)$ die Summe aller Integrale der Zerlegung von $I(-q)$ mit positivem Wert; offenbar sind dies nun diejenigen, die Potenzen von $f(q)$ mit positiven Koeffizienten entsprechen. Es sei $J^-(-q)$ die Summe der übrigen Integrale der Zerlegung; diese besitzen einen negativen Wert. Es ist

$$I(-q) = J^+(-q) + J^-(-q) .$$

Man bestimme nun auf die vorstehend angegebene Weise Schranken A, B, C und D derart, daß

$$I^+(q) < A , \quad J^+(-q) > B , \quad -I^-(q) > C , \quad -J^-(-q) < D \tag{7.11}$$

gilt. So ergibt sich

$$I(q) - I(-q) < A - B - C + D . \tag{7.12}$$

Wiederum findet man die gesuchte obere Schranke für Q^*, indem man die rechte Seite dieser Ungleichung gleich null setzt.

Der praktisch interessierende Fall

$$f(q) = -q + \mu^2 q^3$$

ist von dieser Art; $f(q)$ besitzt außer $q = 0$ noch die weiteren Nullstellen $q = \pm \mu^{-1}$. Dem Gliede $\mu^2 q^3$ entsprechen die Bestandteile $I^+(q)$ und $J^+(-q)$ der obigen Zerlegung; dem Gliede $-q$ entsprechen die Bestandteile $I^-(q)$ und $J^-(-q)$. Man findet

$$-I^-(q) = \int_0^q s(w)\, w\, dw > \int_0^Y w\, dw + \int_Y^q s(w)\, w\, dw > \frac{3}{2\alpha^2} \equiv C$$

und

$$-J^-(-q) = \int_0^{-q} s(w)\, w\, dw < \int_0^{-Y} w\, dw + e^{c q^3} \int_{-Y}^{-q} w\, dw = C + e^{c q^3} \left(\frac{1}{2} q^2 - C\right) \equiv D ,$$

wobei

$$Y = + \frac{\sqrt{3}}{|\alpha|}$$

ist. Indem man die dem Glied $\mu^2 q^3$ entsprechenden Integrale in der obenstehend angegebenen Weise abschätzt, erhält man insgesamt eine obere Schranke für βQ^* als Wurzel der folgenden Gleichung in x:

$$e^x g(x) - \frac{\beta^2}{2\mu^2} e^{\lambda x^3} (x^2 - \lambda^{-1}) = 2 e^p g(p) + 6 \tag{7.13}$$

mit

$$\lambda = \frac{\alpha^2}{3\beta^2} , \qquad g(z) = z^3 - 3 z^2 + 6 z - 6$$

und p gemäß (7.7).

8. Verhalten des Schwingers für kleine Ausschläge. Bei kleinen Ausschlägen kann man Näherungsaussagen über die Amplituden der Schwingungen dadurch erhalten, daß man eine endliche Anzahl von Gliedern der *Taylor*entwicklung der Funktion $I(q)$ betrachtet. Es ist

$$s(w) = 1 + \beta w + \frac{\beta^2}{2} w^2 + \left(\frac{\beta^3}{6} - c\right) w^3 + \left(\frac{\beta^4}{24} - \beta c\right) w^4 + \cdots \tag{8.1}$$

Durch Multiplikation dieser Reihe mit der Entwicklung der Funktion $f(w)$ an der Stelle $w = 0$ und anschließende Integration ergibt sich die gewünschte Potenzreihendarstellung für $I(q)$.

So findet man im Falle der Funktion

$$f(q) = q^{2m+1} \qquad (m = 0, 1, \ldots)$$

[vgl. (6.2)] die Entwicklung

$$I(q) = q^{2m+2}\left(\frac{1}{2m+2} + \frac{\beta q}{2m+3} + \frac{(\beta^2/2) q^2}{2m+4} + \frac{(\beta^3/6 - c) q^3}{2m+5} + \cdots\right). \tag{8.2}$$

Wir bezeichnen die Summe der in (8.2) explizit angegebenen Glieder mit $N(q)$. Wegen (3.4) ist die einem Anfangsausschlag $q = Q_1 > 0$ entsprechende nächste Amplitude, Q_2, näherungsweise durch die Wurzel der Gleichung

$$N(q) - N(Q_1) = 0 \tag{8.3}$$

gegeben. Diese Gleichung läßt sich am einfachsten mit einem der üblichen Näherungsverfahren, etwa dem *Newton*schen, behandeln. Dabei wählt man als erste Näherung für die gesuchte Wurzel zweckmäßigerweise den Wert $q_1 = -Q_1$. Als zweite Näherung für Q_2 ergibt dann das *Newton*sche Verfahren

$$q_2 = -Q_1 - 2\,Q_1^2 \frac{\beta/(2m+3) + (\beta^3/6 - c) Q_1^2/(2m+5)}{1 - \beta Q_1 + \beta^2 Q_1^2/2 - (\beta^3/6 - c) Q_1^3}, \tag{8.4}$$

also speziell im Falle der linearen Rückstellkraft ($m = 0$)

$$q_2 = -Q_1 - 2\,Q_1^2 \frac{\beta/3 - (\beta^3/6 - c) Q_1^2/5}{1 - \beta Q_1 + \beta^2 Q_1^2/2 - (\beta^3/6 - c) Q_1^3}.$$

Die Näherung (8.4) gilt umso genauer, je kleiner Q_1 ist. Für nicht zu große Werte von $|\alpha|$ ist das Korrekturglied negativ. Dann wird $|Q_2| > Q_1$; man befindet sich in dem Gebiete der Energiezufuhr. Ist $|\alpha|$ hinreichend groß, so kann der Zähler des Korrekturgliedes selbst für kleine Werte von Q_1 einen negativen Wert annehmen. Dann ist $|Q_2| < Q_1$. In der Tat entspricht großen Werten von $|\alpha|$ ein kleines Gebiet der Energiezufuhr, und (8.4) gestattet dann sinnvolle Aussagen über Q_2 auch bei Wahl von Werten Q_1, die zwar relativ klein sind, aber trotzdem bereits im Gebiet des Energieentzuges liegen.

9. Die Grenzamplitude im Falle großer Werte von α. Die soeben betrachtete *Taylor*entwicklung läßt sich auch zur Gewinnung von Näherungsaussagen über die Grenzamplitude Q^* heranziehen. Damit man bei Berücksichtigung einer geringen Anzahl von Gliedern dieser Entwicklung noch praktisch verwertbare Näherungen erhält, muß Q^* hinreichend klein sein; dies trifft offenbar für große Werte von $|\alpha|$ zu.

Wir betrachten Schwingungen, die der Funktion

$$f(q) = q^{2m+1} \qquad (m = 0, 1, \ldots)$$

[vgl. (6.2)] entsprechen. Dann ist

$$I(q) - I(-q) = \int_{-q}^{q} s(w)\, w^{2m+1}\, dw = 2\, q^{2m+3}\left(\frac{\beta}{2m+3} - \frac{(c - \beta^3/6) q^2}{2m+5} + \cdots\right). \tag{9.1}$$

Die Grenzamplitude Q^* ist näherungsweise gleich der Wurzel der Gleichung, die man erhält, wenn man eine endliche Anzahl von Gliedern der Entwicklung (9.1) berücksichtigt und die sich so ergebende Funktion gleich null setzt. So erhält man bei Verwendung der ersten beiden der genannten Glieder eine quadratische Gleichung, deren Lösung für gegenüber α kleine Werte von β die Form

$$Q^* \approx \sqrt{\frac{3(2m+5)}{\alpha^2 (2m+3)}} \qquad (m = 0, 1, \ldots) \tag{9.2}$$

hat. Wie man sieht, nimmt Q^* mit wachsendem m monoton ab; dies ist vom Standpunkte der Mechanik aus einleuchtend. Ferner folgt aus (9.2)

$$\lim_{m \to \infty} Q^* = + \frac{\sqrt{3}}{|\alpha|}$$

(vgl. Abschnitt 4).

10. Beispiele. Abb. 1 zeigt das „Amplitudendiagramm" einer durch die Differentialgleichung (2.1) beschriebenen Schwingung mit linearer Rückstellkraft für den wesentlichen Parameter $u \equiv \alpha/\beta = 1$. Dieses Diagramm wurde durch numerische Auswertung des Integrals $I(q)$ gewonnen. Auf Grund der Amplitudenbeziehung (3.4) ist klar, wie man aus dieser graphischen Darstellung zu vorgegebener Anfangsamplitude Q_1 die Beträge der Amplituden $Q_2, Q_3, \ldots$ entnehmen kann.

Ist z. B. $\beta = 2$ und wird $Q_1 = 1/2$ gewählt, so findet man, wie in Abbildung 1 angedeutet ist, von $\beta Q = 1$ ausgehend nacheinander

$$Q_2 \approx -\frac{1}{2}\,1{,}65 \approx -0{,}83\,,$$

$$Q_3 \approx 1{,}05\,,\quad Q_4 \approx -1{,}09\,,$$

usw. Wie man aus Abb. 1 ersieht, hat die Grenzamplitude Q^* im vorliegenden Falle etwa den Wert $2{,}2/\beta = 1{,}1$. Die Ungleichung (4.3) liefert die untere Schranke 0,86 ... Als obere Schranke erhält man aus (7.9″) den Wert 1,62 und aus (7.9′) den (stets genaueren) Wert 1,45. Für den Fall der linearen Rückstellkraft hat die Näherungsformel (9.2) die Gestalt

$$Q^* \approx \frac{\sqrt{5}}{|\alpha|} \qquad (9.2')$$

und liefert in unserem Fall den Wert 1,11, der um etwa 1% von dem genauen Wert abweicht.

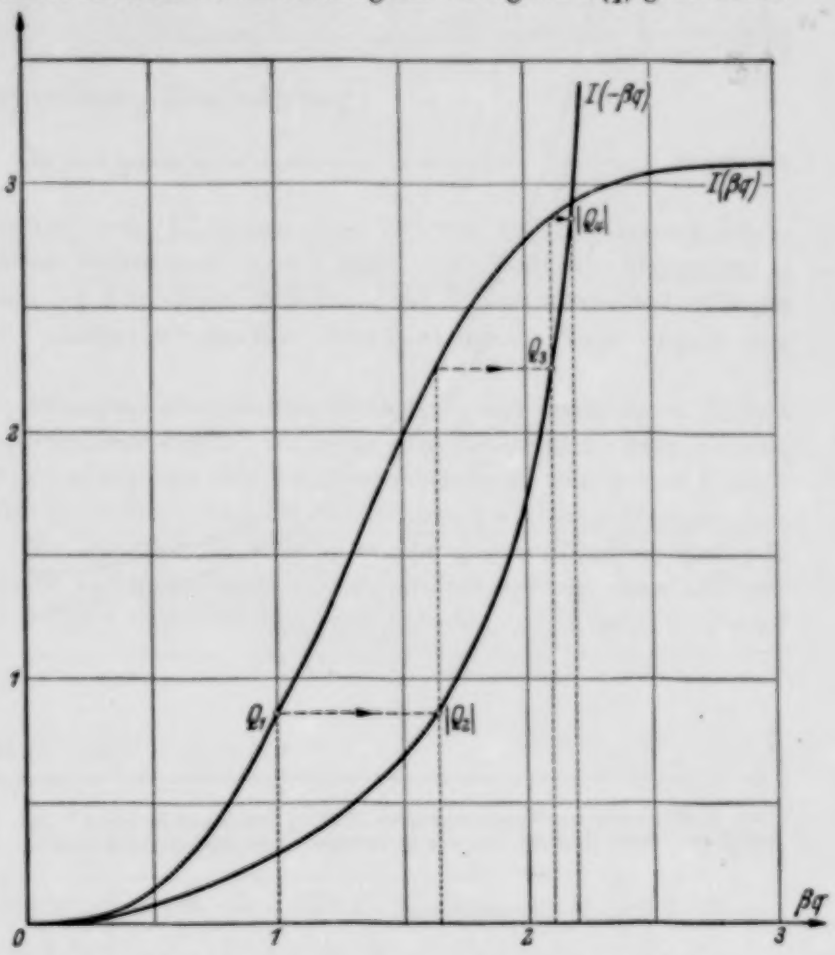

Abb. 1. „Amplitudendiagramm" für Schwinger gemäß (2.1) mit $f(q) = q$, $\alpha/\beta = 1$ und $\beta Q_1 = 1$.

Abb. 2 zeigt die Funktion βQ^* in Abhängigkeit von dem wesentlichen Parameter u und zwar für den Fall $f(q) = q$ (lineare Rückstellkraft; ausgezogene Kurve) und für den Fall $f(q) = q^3$ (gestrichelte Kurve). Im erstgenannten Falle beträgt die Abweichung der durch (9.2′) gegebenen Näherungswerte von den exakten Werten bei dem in Abb. 2 wiedergegebenen Bereich etwa 1% bis 3%. Da die Näherungswerte auf einer Hyperbel liegen, so sind die exakten Werte, von diesem Fehler abgesehen, ebenfalls proportional zu $1/u$. Auch für den Fall $f(q) = q^3$ ist die Genauigkeit der Näherungsformel (9.2) befriedigend.

11. Behandlung der Differentialgleichung (1.3) mit Hilfe des Isoklinenverfahrens in der Phasenebene. Um die Differentialgleichung (1.3) mit Hilfe des Isoklinenverfahrens behandeln zu können, ist es zweckmäßig, $\dot{q} = v$, also $\ddot{q} = (dv/dq)\,v$ zu setzen, also die Koordinaten q und v der Phasenebene zu verwenden. So erhält man für negative Werte von v

$$\frac{dv}{dq} v + \frac{\beta}{2}(1 - \alpha^2 q^2)\, v^2 + \frac{\gamma^2}{2} f(q) = 0 \qquad (11.1)$$

und für positive Werte von v

$$\frac{dv}{d\tilde{q}} v + \frac{\beta}{2}(1 - \alpha^2 \tilde{q}^2)\, v^2 + \frac{\gamma^2}{2}\left(f_u(\tilde{q}) - f_g(\tilde{q})\right) = 0 \quad \text{mit} \quad \tilde{q} = -q\,, \qquad (11.2)$$

wobei f_u und f_g wie in Abschnitt 2 definiert sind. Die Isoklinenbilder dieser beiden Differentialgleichungen lassen sich zu einem einheitlichen Isoklinenbild zusammensetzen, indem man die obere

$(\tilde{q}, v)$-Halbebene mit dem zu (11.2) gehörenden Isoklinenbild und die untere (q, v)-Halbebene mit dem zu (11.1) gehörenden Isoklinenbild zu einer Ebene zusammenfügt.

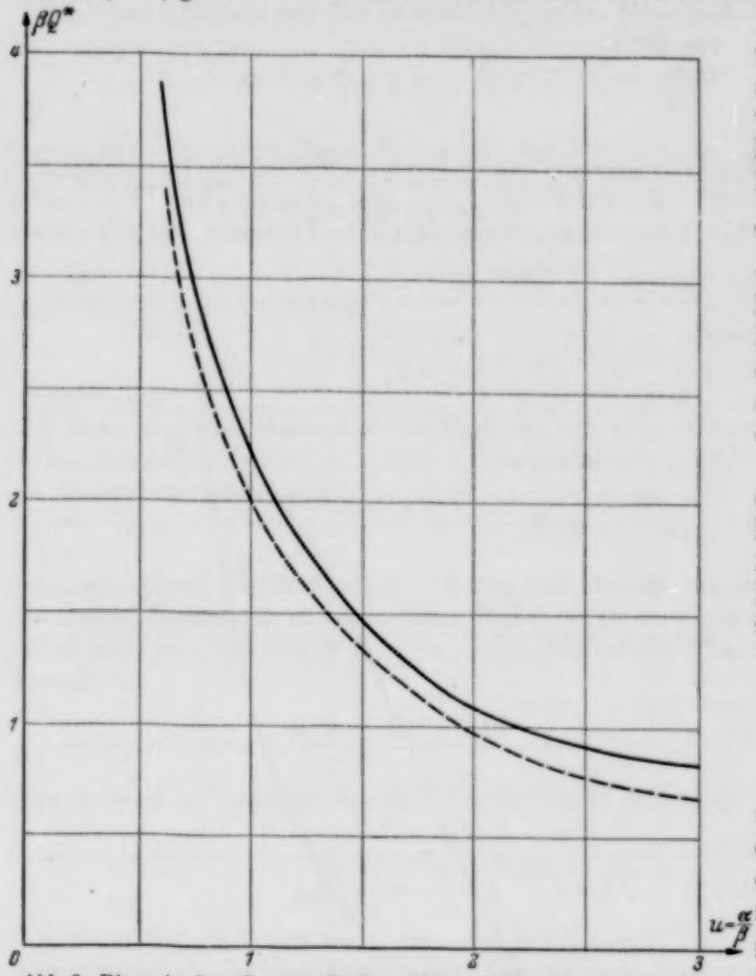

Abb. 2. Dimensionslose Grenzamplituden βQ^* in Abhängigkeit von α/β für Schwinger gemäß (2.1) mit $f(q) = q$ (ausgezogen) und $f(q) = q^3$ (gestrichelt).

Abb. 3 zeigt ein solches kombiniertes Isoklinenbild für den Fall der linearen Rückstellkraft und die Parameterwerte $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Die Isoklinen haben in diesem Fall für (11.1) die Darstellung

$$v = (q^2 - 1)^{-1} \left(k \pm \sqrt{k^2 + q\,(q^2 - 1)}\right),$$

wobei $dv/dq = k = \text{konst.}$ gesetzt ist; hierbei sind jeweils nur diejenigen Kurvenzweige zu berücksichtigen, für die $v < 0$ ausfällt. Eine ähnliche Darstellung ergibt sich für die Isoklinen der Differentialgleichung (11.2).

In Abb. 3 ist die Grenzschwingung (gestrichelt) eingezeichnet und weiterhin eine bei $q = Q_1 = 0{,}25$ beginnende Schwingung, deren Amplituden dem Betrage nach monoton der Grenzamplitude zustreben.

Wegen $v = dq/dt$ ist

$$t(q) = \int_{Q_1}^{q} \frac{dw}{v(w)}\,, \qquad (11.3)$$

und man kann, indem man die Werte des Integranden dieses Integrals aus dem Isoklinenbilde entnimmt, durch zeichnerische oder numerische Integration die Funktion $q = q(t)$ für die jeweils interessierende Schwingung näherungsweise ermitteln.

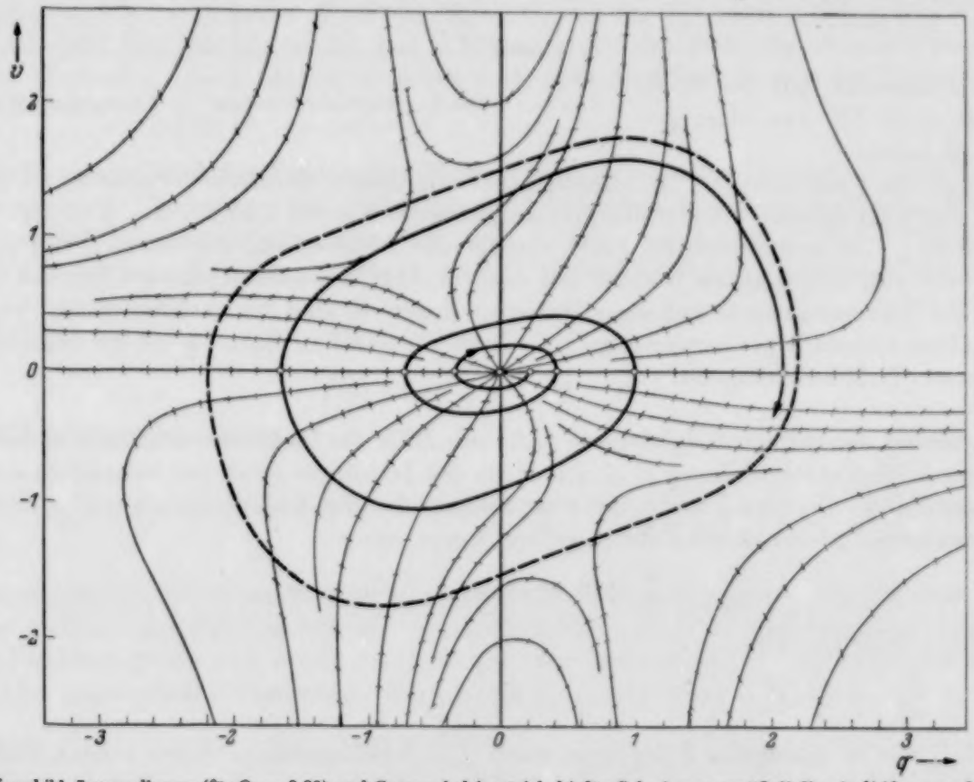

Abb. 3. Isoklinenbild, Integralkurve (für $Q_1 = 0{,}25$) und Grenzzykel (gestrichelt) für Schwinger gemäß (1.3) mit $f(q) = q$ und $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

12. Eine Näherungslösung der Differentialgleichung (1.2) für kleine Werte von β und lineare Rückstellkraft. Wir betrachten die Differentialgleichung (1.2) wiederum für eine aus einer Ruhelage $q = Q_1 > 0$ beginnende Schwingung. Dann ist bis zum nächsten Umkehrpunkt $q = Q_2 < 0$ stets $\dot{q} < 0$. Mit $\delta = \frac{1}{2}\beta$ nimmt (1.3) für diesen Abschnitt der Schwingung im Falle linearer Rückstellkraft die Form

$$\ddot{q} + \delta\,(1 - \alpha^2 q^2)\,\dot{q}^2 + \varkappa^2 q = 0 \tag{12.1}$$

an. Wir untersuchen die Lösung dieser Differentialgleichung für kleine Werte von δ.

Für $\delta = 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$q(t) = a \sin(\varkappa t + b) \tag{12.2}$$

und die der obigen Anfangsbedingung entsprechende Sonderlösung

$$q(t) = Q_1 \cos \varkappa t\,. \tag{12.2'}$$

Für kleine Werte von $|\delta|$ wird sich die Lösung von (12.1) nur „wenig" von (12.2) unterscheiden. Demnach ist zu erwarten, daß man für kleine Werte von $|\delta|$ mit Hilfe der „Methode der langsam variablen Amplitude und Phase" (d. h. unter der Annahme, daß die in (12.2) auftretenden Größen a und b zwar zeitabhängig sind, sich aber nur „langsam" ändern) eine brauchbare Näherungslösung erhält.

Wir bemerken jedoch sogleich, daß die übliche Form dieser Methode[1], wie man sie z. B. bei der *van der Pol*schen Differentialgleichung verwenden kann, hier nicht zum Ziele führt. Man kommt nämlich bei diesem Grade der Approximation wieder zu der Ausgangsannahme, daß a und b konstant sind, also zu (12.2) zurück. Dies ist dadurch bedingt, daß die Funktionen q und $\dot{q}$ im Dämpfungsglied von (12.1) quadratisch vorkommen. Wir werden die bei Anwendung der üblichen Methode durchzuführende Mittelwertbildung durch eine andere geeignete Integration ersetzen; diese schließt eine geringere Vernachlässigung in sich und ergibt eine Lösung, die (12.1) bis auf Glieder in δ^2 und höherer Ordnung befriedigt.

Differentiation von (12.2) nach t liefert

$$\dot{q} = a\,\varkappa \cos p \quad \text{mit} \quad p = \varkappa t + b\,. \tag{12.3}$$

Wir haben eine Lösung von der Form

$$q = a(t) \sin p \tag{12.4}$$

anzugeben und die nun zeitabhängig zu denkenden Größen a und b zu bestimmen. Durch Differentiation folgt aus (12.4)

$$\dot{q} = \dot{a} \sin p + a\,(\varkappa + \dot{b}) \cos p\,. \tag{12.5}$$

Indem wir den durch (12.3) gegebenen Näherungsausdruck in (12.5) einführen, ergibt sich

$$\dot{a} \sin p + a\,\dot{b} \cos p = 0\,. \tag{12.6}$$

Fassen wir in (12.3) nun die Größen a und b als zeitabhängig auf, so finden wir durch Differentiation

$$\ddot{q} = \dot{a}\,\varkappa \cos p - a\,\varkappa\,(\varkappa + \dot{b}) \sin p\,. \tag{12.7}$$

Setzen wir (12.2), (12.3) und (12.7) in (12.1) ein, so erhalten wir

$$\dot{a} \cos p - a\,\dot{b} \sin p = -\delta\,a^2 \varkappa\,(1 - \alpha^2 a^2 \sin^2 p) \cos^2 p\,.$$

Unter Berücksichtigung von (12.6) läßt sich diese Gleichung in das folgende System von Differentialgleichungen zerlegen:

$$\left.\begin{aligned} \dot{a} &= -\delta\,a^2 \varkappa\,(1 - \alpha^2 a^2 \sin^2 p) \cos^3 p\,, \\ \dot{b} &= \delta\,a\,\varkappa\,(1 - \alpha^2 a^2 \sin^2 p) \cos^2 p \sin p\,. \end{aligned}\right\} \tag{12.8}$$

Nach der üblichen Methode der langsam variablen Amplitude und Phase wäre nun der Mittelwert der beiden linksstehenden Größen über eine Periode zu bilden. Dies ergäbe $\dot{a} = 0$ und $\dot{b} = 0$. Wir integrieren stattdessen die Differentialgleichungen (12.8); hierbei sehen wir die in den rechten

[1] *N. W. McLachlan*, Ordinary non-linear differential equations. Oxford 1950.

Seiten enthaltenen Größen a und b als konstant an. So ergibt sich

$$a(t) = a - \delta a^2 \left(\sin p - (1 + \alpha^2 a^2) \frac{\sin^3 p}{3} + \alpha^2 a^2 \frac{\sin^5 p}{5} \right) \tag{12.9}$$

und

$$b(t) = b - \delta a \left((1 - \alpha^2 a^2) \frac{\cos^3 p}{3} + \alpha^2 a^2 \frac{\cos^5 p}{5} \right), \tag{12.10}$$

wobei die (rechts an erster Stelle stehenden) Integrationskonstanten wegen (12.2) mit a bzw. b bezeichnet worden sind. Hieraus lassen sich nun leicht die Fourierentwicklungen von $a(t)$ und $b(t)$ gewinnen; indem wir δ wieder durch $\frac{1}{2}\beta$ ersetzen und die Abkürzung $A = \frac{1}{4}\alpha^2 a^2$ einführen, erhalten wir

$$a(t) = a - (\beta a^2/8) \left((3 - 2A) \sin p + (1 + A) \frac{\sin 3p}{3} + A \frac{\sin 5p}{5} \right), \tag{12.11}$$

$$b(t) = b - (\beta a/8) \left((1 - 2A) \cos p + (1 - A) \frac{\cos 3p}{3} + A \frac{\cos 5p}{5} \right). \tag{12.12}$$

Bemerkenswerterweise bestehen diese Entwicklungen aus nur endlich vielen Gliedern.

Betrachten wir in (12.11) und (12.12) nur die langsam veränderlichen Bestandteile, also nur die $\sin p$ bzw. $\cos p$ enthaltenden Glieder, so gewinnen wir die Näherung

$$q(t) \approx (a - r(a) \sin p) \sin (\varkappa t + b - z(a) \cos p) \tag{12.13}$$

mit

$$r(a) = \frac{1}{8}\beta a^2 (3 - 2A), \qquad z(a) = \frac{1}{8}\beta a (1 - 2A).$$

Setzen wir die der Lösung (12.2′) entsprechenden konstanten Werte $a = Q_1$ und $b = \frac{1}{2}\pi$ in (12.13) ein, so ergibt sich die Sonderlösung

$$q(t) \approx (Q_1 - r(Q_1) \cos \varkappa t) \cos (\varkappa t + z(Q_1) \sin \varkappa t), \tag{12.14}$$

also für $t = 0$ speziell

$$q(0) = Q_1 - r(Q_1), \qquad \dot{q}(0) = 0.$$

Dies besagt, daß den Anfangsbedingungen für (12.2) nur geringfügig geänderte Anfangsbedingungen für (12.13) entsprechen, indem sich die Ausgangslage von Q_1 nach $Q_1 - r(Q_1)$ verschiebt. Weiterhin sieht man schließlich, daß $r(a)$ für

$$a = + \frac{\sqrt{6}}{|\alpha|} \tag{12.15}$$

verschwindet. Dieser Wert stellt demnach eine Näherung für die Grenzamplitude dar [vgl. (12.14)]; er weicht allerdings von der durch (9.2′) gegebenen Näherung (s. Abschn. **10**) um rund 10% ab.

13. Zusammenfassung. Die betrachtete „modifizierte *van der Pol*sche Differentialgleichung"

$$\ddot{q} - (\operatorname{sgn} \dot{q}) \frac{\beta}{2} (1 - \alpha^2 q^2) \dot{q}^2 + \varkappa^2 f(q) = 0 \tag{1.3}$$

beschreibt das Verhalten einer besonderen Klasse von selbsterregten Schwingern mit einem Freiheitsgrad. Die Gleichung (1.3) läßt sich in eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung überführen; mit $V = \dot{q}^2$ und $\gamma^2 = 2\varkappa^2$ erhält man im Falle negativer Geschwindigkeit

$$V' + \beta (1 - \alpha^2 q^2) V + \gamma^2 f(q) = 0; \tag{2.2}$$

im Falle positiver Geschwindigkeit ergibt sich eine ähnliche Differentialgleichung [nämlich (2.2′)]. Die Rückstellkraft des Systems ist zunächst beliebig. Vom physikalischen Standpunkt aus ist es sinnvoll, sich auf „echte" Rückstellkräfte zu beschränken, d. h. auf Rückstellkräfte, die stets im Sinne einer Verringerung des jeweiligen Ausschlages wirken. Die Funktion $f(q)$ wird deshalb den Bedingungen

$$f(q) \geqq 0 \text{ für } q > 0, \quad f(q) \leqq 0 \text{ für } q < 0, \quad (q) \not\equiv 0 \tag{2.3}$$

unterworfen.

Die Lösung der Differentialgleichung (2.2) läßt sich, von trivialen Sonderfällen abgesehen, nicht durch eine endliche Anzahl bekannter Funktionen darstellen. Trotzdem kann man weitgehenden Aufschluß über das Verhalten des Schwingers erhalten, insbesondere auf Grund der

„Amplitudenbeziehung“ (3.4), mit deren Hilfe sich die Folge der Umkehrpunkte der Schwingung bestimmen läßt.

Die in der vorliegenden Untersuchung hergeleiteten Ergebnisse beziehen sich auf eine Auswahl praktisch wichtiger Formen der Rückstellkraft. Wie man aus den Betrachtungen ersieht, gestatten die verwendeten Methoden die Herleitung ähnlicher Resultate auch für andere Rückstellkräfte. Wir nehmen stets $\alpha \neq 0$ an; der Fall $\alpha = 0$, der von dem Fall $\alpha \neq 0$ vom mechanischen Standpunkt aus grundsätzlich verschieden ist, wurde früher[1] schon ausführlich untersucht.

Für kleine Ausschläge q wird dem Schwinger Energie zugeführt, während für hinreichend große Werte q Energie entzogen wird. In Abschnitt **5** wird bewiesen, daß, wenn $f(q)$ ungerade ist, die Folge der Beträge der Maximalausschläge $Q_1, Q_2, \ldots$ (im Text kurz als „Amplituden“ bezeichnet) gegen einen endlichen Grenzwert Q^* („Grenzamplitude“) strebt. Die genannte Folge wächst bzw. fällt monoton je nachdem, ob die Schwingung von einer Ruhelage $q = Q_1 < Q^*$ oder $q = Q_1 > Q^*$ aus beginnt. Ist $f(q)$ nicht ungerade, so erhält man statt des einen Grenzwertes Q^* zwei Grenzwerte.

Die Größe der in der Differentialgleichung (2.2) auftretenden Parameter α, β und γ ist von unterschiedlichem Einfluß auf das Verhalten des Schwingers. Ist beispielsweise $f(q) = q^{2m+1}$, $m = 0, 1, \ldots$, so hängt das Verhältnis der Beträge aufeinanderfolgender Amplituden nur von dem „wesentlichen Parameter“ $u = \alpha/\beta$ ab und wächst monoton mit wachsendem u (vgl. Abschnitt **6**).

In den Abschnitten **4** und **7** werden praktisch brauchbare untere und obere Schranken für die Grenzamplitude Q^* angegeben. Zum Beispiel gilt die Abschätzung $Q^* > \sqrt{3}/|\alpha|$. Obere Schranken ergeben sich als Nullstellen gewisser Gleichungen [vgl. (7.9) und (7.10)]. Derartige Schranken lassen sich auch im Falle gewisser Rückstellkräfte gewinnen, für die (2.3) nicht erfüllt ist (vgl. im zweiten Teil des Abschnittes **7**).

Für kleine Ausschläge kann man Näherungsaussagen über die Amplituden erhalten, indem man eine endliche Anzahl von Gliedern der *Taylor*reihe der Lösung von (2.2) berücksichtigt (vgl. Abschnitt **8**). Dieser Weg führt auch zu (bei großen Werten von $|\alpha|$ praktisch brauchbaren) Näherungen für die Grenzamplitude Q^* (vgl. Abschnitt **9**).

In Abschnitt **11** wird die betrachtete Differentialgleichung mit Hilfe des Isoklinenverfahrens in der Phasenebene behandelt. Schließlich wird in Abschnitt **12** eine Näherungslösung der Differentialgleichung (1.3) für den Fall kleiner Werte von β und lineare Rückstellkraft auf eine Weise hergeleitet, die eine Verfeinerung der üblichen „Methode der langsam variablen Amplitude und Phase“ darstellt.

(Eingegangen am 17. Januar 1957)

Anschriften der Verfasser:
Professor Dr.-Ing. *K. Klotter*, Stanford, Calif., Division of Engineering Mechanics, Stanford University
Professor Dr. *E. Kreyszig*, Columbus, Ohio, Department of Mathematics, Ohio State University

[1] Siehe Fußnote 5 von Seite 389.

Piezoelektrische Geräte zur Bestimmung des Pitotdrucks, des statischen Drucks, des dynamischen Drucks und des Impulses einer pulsierenden Strömung

Von F. Staab

1. Einleitung. Man kann ohne Schwierigkeit, z. B. in Windkanälen, bei stationären Strömungen mit Hilfe eines Röhrchens (Pitotrohr), das der Strömung entgegengestellt wird und durch welches man den Druck der zur Ruhe gekommenen Gase erhält, bei Unter- und Überschallgeschwindigkeiten auf die Gasgeschwindigkeiten schließen. Diese Methode liefert bei pulsierenden Strömungen wohl Mittelwerte, doch kann daraus kaum der wirkliche veränderliche Strömungsvorgang erhalten werden.

Es wurde jedoch viel Mühe aufgewendet um bei pulsierenden Strömungen die durchfließenden Gasmengen, etwa durch ein Rohr, mit Hilfe von Düsen und Blenden zu erhalten [1, 2, 3, 4] und dadurch auch die mittleren Geschwindigkeiten. Ebenso gibt es eine größere Zahl von Meßgeräten um den statischen Druck in einer stationären Strömung durch ein Hakenrohr, das seitliche Öffnungen hat, oder bei pulsierenden Strömungen am Rohrrand durch piezoelektrische Meßelemente zu bestimmen [5, 6, 7, 8]. Durch diese Meßanordnungen erhält man am Rande der Strömung mit ziemlicher Genauigkeit bis zu höheren Frequenzen den veränderlichen statischen Druck.

Man hat auch Prallplatten benutzt, um mit ihnen die Rückstoßkräfte z. B. eines Motors, wenn dessen Strömung gleichförmig verläuft zu bestimmen und diese Methode auch für Pulsationen angewandt, wobei jedoch nur ein Mittelwert des Impulses und des Schubes bestimmt wurde[9].

Bei den Arbeiten an pulsierenden Strahltriebwerken in Deutschland während des Krieges ergab sich die dringende Notwendigkeit, deren rasch veränderliche Gasgeschwindigkeiten zu bestimmen, ebenso den statischen Druck im Strahl, da Messungen an den Triebwerken selbst oft von heftigen Erschütterungen gestört waren. Ebenso war es notwendig, den veränderlichen Impuls im Strahl zu erhalten, da Schubmessungen bei rascheren Verbrennungen etwa kaum möglich waren. Aus diesen Gründen wurde von 1941 an eine Zahl von Meßgeräten entwickelt, wobei der piezoelektrische Effekt benützt wurde, um die genannten Größen zu erhalten. Diese Meßgeräte haben sich über Jahre bewährt.

Schädliche instationäre Strömungszustände treten auch bei den modernen Strahltriebwerken auf. Bei der Nachverbrennung in Strahlturbinen z. B., ebenso bei Raketen und Staustrahltriebwerken. Die Erfassung der instationären turbulenten Ausbreitungsvorgänge im Strahl ist dazu wegen der damit vorhandenen Lärmaussendung, die verringert werden muß, sehr wichtig. Ebenso sind Meßgeräte dieser Art für gewisse strömungstechnische Untersuchungen von größter Bedeutung, und es ist von großem Wert, bequeme und sicher arbeitende Untersuchungsanordnungen zu besitzen.

Es ist auch nur schwer möglich, mit Hilfe der Schwebeteilchenkinomatographie leuchtende Teilchen festzuhalten, Ionenlaufzeitmessungen durchzuführen, ebenso die Schlierenkinomatographie anzuwenden und Stoßwellen, weiter Ultraschallwellen aufzunehmen bei den rasch veränderlichen Vorgängen, die sich auch über den Querschnitt des Strahls, z. B. von Strahlantrieben, rasch verändern [10, 11, 12, 13].

---

[1] *O. Lutz*, Ing.-Arch. 3 (1932) S. 138 und S. 432.
[2] *F. Schultz-Grunow*, Forschung Ing.-Wesen 12 (1941) S. 117.
[3] *A. K. Oppenheim* und *E. G. Chilton*, Transactions ASME (1955) S. 231.
[4] *W. A. Wildhack*, Science 120 (1954) S. 191.
[5] *S. Meurer*, Forschung Ing.-Wesen 11 (1940) S. 237.
[6] *K. Staiger*, Motortechn. Z. 5 (1944) S. 87.
[7] *W. Gohlke*, Einführung in die piezoelektrische Meßtechnik, Leipzig 1954. Mit einer umfassenden Schrifttumsangabe, welche besonders auch die wichtigen Arbeiten des Verfassers enthält, die ehemals im Institut für Motorenforschung der Luftfahrtforschungsanstalt Braunschweig (Leiter Prof. Dr. *E. Schmidt*) durchgeführt wurden.
[8] *T. Wrathall*, Instruments 26 (1953) S. 50.
[9] *S. Hasinger*, Jb. 1940 d. Dtsch. Luftfahrtforschung, S. II 304.
[10] *H. Schardin*, Ergeb. exakt. Naturw. 20 (1942) S. 303.
[11] High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion IX (1954) Princeton University Press: Physical measurements in Gasdynamics and Combustion. *R. W. Ladenburg, B. Lewis, R. N. Pease, H. S. Taylor.*
[12] *G. Dubois* und *R. Kling*, C. R. Acad. Sci. Paris 228 (1949) S. 363.
[13] *D. G. Marlow, C. R. Nisewanger* und *W. M. Cady*, J. appl. Phys. 20 (1949) S. 771.

Da man dazu Ionen, deren Menge sich bei pulsierenden Vorgängen rasch verändert, in den Strahlen von Strahlantrieben antrifft, ist es dazu kaum möglich, mit Hilfe der Koronaentladung Gasgeschwindigkeitsbestimmungen durchzuführen[1]. Schwierig ist weiter die Anwendung von Hitzdrahtanemometern[2]. Wenn man auch bei Luftstrahlmodellen geringen Querschnitts brauchbare Ergebnisse mit Hilfe von Photo-Multipliern gewonnen hat[3], so ist diese Methode doch beschränkt bei den gedachten Anwendungen.

Es ist dazu bequem, Verstärker und Oszillographen zu benützen, die an und für sich schon zur Bestimmung des statischen Druckes am Rohrrand vorhanden sind.

2. Prinzip der Meßanordnungen. Man kann den Pitotdruck in einer pulsierenden Strömung bestimmen, bei der sich die Gasgeschwindigkeiten und der statische Druck rasch ändern, indem man die Drucke über ein kleines kolbenartiges Gebilde auf Quarze wirksam sein läßt. Auf deren Oberflächen entstehen sich ändernde Elektrizitätsmengen. Äußerlich sieht die Meßeinrichtung ähnlich aus wie Meßgeräte dieser Art für stationäre Strömungen. Ein Verstärker erhöht die Spannungsänderungen, auch eines zumeist parallel geschaltenen Kondensators, die mit Hilfe von Schleifen- oder Kathodenstrahloszillographen angezeigt werden. Die hohen Eigenfrequenzen der Anordnungen erlauben noch beträchtliche Frequenzen aufzunehmen.

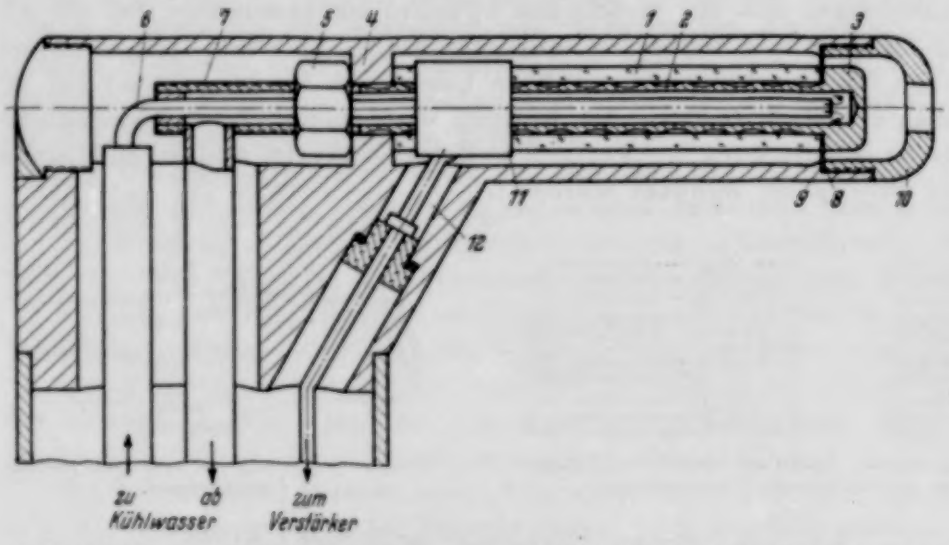

Abb. 1. Gerät zur Bestimmung des Pitotdruckverlaufes in einer pulsierenden Strömung. *1* Hohlzylinderdoppelquarz, *2* Röhrenfeder, *3* Endteller, *5* Vorspannschraubenmutter, *6* und *7* Kühlwasserleitungen, *8* Kupfermembran, *9* Gehäuse, *10* Vorderteil, *11* Metallfeder, *12* Leitung zum Verstärker.

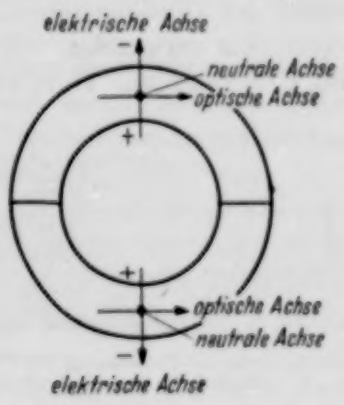

Abb. 2. Hohlzylinderquarz, der aus zwei Hälften besteht.

Zur Bestimmung des veränderlichen statischen Druckes im Strahl benützt man ein Gerät, das ähnlich wie ein Hakenrohr aussieht, mit scharfer oder abgerundeter Spitze, hinter der in einem gewissen Abstand, so daß die Störungen, welche von der Spitze ausgehen den veränderlichen statischen Druck nicht mehr merklich beeinflussen, Schlitze angebracht sind. Diese müssen so breit sein, daß der statische Druck zu dem kolbenartigen Gebilde, welches die Kräfte aufnimmt, dringen kann. Auf ähnliche Weise erhält man weiter den veränderlichen Impuls einer Strömung.

3. Geräte zur Bestimmung des Pitotdrucks. Der Aufbau eines Druckelementes der genannten Art kann folgendermaßen geschehen[4]. In Abb. 1 stellt *1* einen Hohlzylinderquarz dar. Dieser ist aus zwei gleich großen Hälften gebildet, die so zusammengelegt sind, daß die elektrischen und die neutralen Achsen in entgegengesetzte, die optischen Achsen in die gleichen Richtungen zeigen, wie dies in Abb. 2 angedeutet ist. Bei Druck in Richtung der Hohlzylinderachse entstehen auf den äußeren Flächen negative Ladungen, während sich innen positive bilden. Die äußeren und inneren Flächen der Quarze sind mit einer Metallschicht versehen und die inneren geerdet. An den Enden der äußeren Zylinderflächen der Quarze sind schmale Bereiche, die als Isolationsflächen dienen[5].

---

[1] *W. Fucks*, Z. Physik 137 (1954) S. 49.

[2] *U. Jacob*, Arch. techn. Messen 5 (1954) S. 1 u. 25. Vgl. auch S. 219—276 des in Fußnote 11 von Seite 404 genannten Buches.

[3] *A. Powell*, Proc. Phys. Soc. (B) 66 (1953) S. 1039.

[4] *F. Staab*, Geräte zur Bestimmung des Pitotdrucks einer pulsierenden Strömung, FKFS-Bericht 1942.

[5] Siehe Fußnote 5 von Seite 404.

Durch den Doppelquarz geht eine Röhrenfeder aus möglichst leichtem Werkstoff *2* hindurch (Abb. 1), welche mit ihrem Endteller *3* die Quarze gegen ein glattes Widerlager *4* mit Hilfe einer Schraubenmutter *5* drückt. Auf diese Weise wird eine größere Vorspannung erzeugt. In der Röhrenfeder wird durch das Röhrchen *6* Kühlwasser nach *3* geführt. Dieses wird zwischen diesem Röhrchen und der Innenwand der Röhrenfeder bei *7* abgeführt.

Zwischen dem Endteller *3* und den Doppelquarzen *1* ist eine ausgeglühte Kupfermembran *8* von 0,1 mm oder einer geringeren Dicke eingepreßt, die von dem vorderen Teil *10* des Gehäuses auf den Gehäuseeinsprung *9* angepreßt wird. Auf sie wirkt eine verhältnismäßig kleine Kraft, so daß rasche Temperaturschwankungen von ihr kaum die Anzeigen des Druckelementes beeinflussen. Der Vorderteil *10* kann halbkugelförmig oder kegelig ausgebildet sein und besitzt eine Bohrung, z. B. entsprechend den Massen, die beim *Prandtl*schen Staurohr üblich sind.

Auf den äußeren Flächen des Quarzes liegt noch eine aufgeschlitzte Metallfeder *11*. Eine auf der Feder elastisch sitzende oder mit ihr verbundene Leitung *12* führt zum Verstärker. Bei einer Änderung des Druckes und der mechanischen Belastung des Kristalls ändert sich der Anodenstrom, wobei dessen Änderung ein Maß für die entstehende Ladungsänderung ist. Der rückwärtige Gehäuseteil wird durch eine entsprechend geformte Schraube *13* abgeschlossen. In den Gehäuseraum mit den Quarzen können keine Verbrennungsgase eindringen.

Die bei einer statischen Eichung, etwa mit Druckluft, sich ergebende Eichkurve, also die Abhängigkeit des Oszillographenausschlages von der Größe des Druckes im Innenraum bei *10*, ist linear zu erhalten. Die Empfindlichkeit war selbst bei längerem Kabel zwischen Quarzelement und Verstärker so groß, daß etwa für eine halbe Atmosphäre Überdruck im Innenraum bei *10* einige cm Oszillographenausschlag erhalten wurden. Im übrigen wurden übliche Netzanschlußverstärker verwendet, welche für die Bestimmung des Verlaufs und der Größe des statischen Drucks am Rohrrand mit Hilfe üblicher Druckgeber benützt wurden[1].

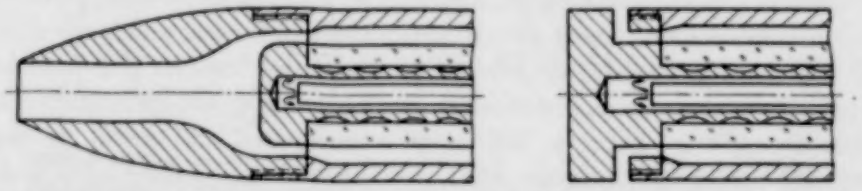

Abb. 3. Gerät zur Bestimmung des Pitotdruckverlaufs. Links: mit ebener Vorderfläche. Rechts: vorderer Teil mit Durchbohrung und scharfer Vorderkante.

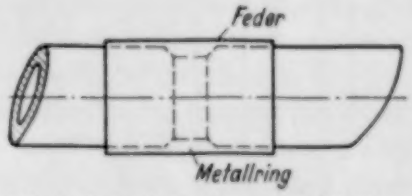

Abb. 4. Verbindung von zwei Hohlzylinderdoppelquarzen.

Es wird hier der transversale piezoelektrische Effekt verwendet. Während beim longitudinalen piezoelektrischen Effekt die frei werdenden Elektrizitätsmengen von den Abmessungen des Kristallstückes unabhängig sind, ist dies beim transversalem Effekt nicht der Fall. Läßt man den Pitotdruck G_y in Richtung der y-Achse, der neutralen Achse, wirken, und sind l und d die Abmessungen eines Quarzstabes in Richtung der y- und x-Achse, also der elektrischen oder polaren Achse[2], dann ist die frei werdende Elektrizitätsmenge

$$Q_x = -\, d_{11} \frac{1}{d} G_y , \tag{1}$$

wobei d_{11} der entsprechende piezoelektrische Modul ist. Man kann also durch eine Verkleinerung der Quarzdicke und eine Verlängerung des Quarzes die Empfindlichkeit erhöhen.

Da die Elektrizitätsmenge, welche beim longitudinalen Effekt frei wird — G_z ist wieder der wirksame Pitotdruck —

$$Q_x = d_{11} G_x \tag{2}$$

ist, kann man dies hierbei nicht erreichen, und es lassen sich beim transversalen Effekt größere Empfindlichkeiten gewinnen.

Druckelemente nach Abb. 1 wurden mit 10 mm Durchmesser verwendet. Doch kann dieser noch etwas verkleinert werden. Dieser Durchmesser ist verhältnismäßig gering gegenüber den größeren des Strahls der modernen Strahlantriebe.

In Abb. 3 sind noch zwei andere Ausführungen des vorderen Geräteteils zur Bestimmung des Pitotdruckes angedeutet, unten eine auch sonst übliche Anordnung mit scharfer Vorderkante, die ebenfalls in das Gehäuse eingeschraubt werden kann. Es ist wertvoll, sich auch hier den üblichen

[1] Siehe Fußnote 6 von Seite 404.

[2] *L. Bergmann*, Der Ultraschall und seine Anwendung in Wissenschaft und Technik, 6. Aufl. I. Teil, Kapitel 2. Stuttgart 1954.

Formen anzupassen, um die Größe der Fehler abschätzen zu können[1, 2, 3]. Daneben ist eine für manche Zwecke interessierende Anordnung, bei welcher der kleinere Endteller 3 in Abb. 1 vergrößert ist. So wird sein äußerer Durchmesser gleich dem Außendurchmesser des Gerätegehäuses. Doch können hier auch Abrundungen usw. angebracht sein. Der Spalt zwischen diesem vorderen Teil und dem Gehäuse ist so breit, daß dazwischen der veränderliche statische Druck der Strömung genügend rasch eindringen kann. Dadurch erhält man eine größere Empfindlichkeit der Meßeinrichtung für den dynamischen Druck, doch auch unter Umständen Nachteile.

Um die Empfindlichkeit zu erhöhen, wurden zwei oder auch mehr Hohlzylinderquarze, die aus je zwei Hälften bestehen von etwa 6 mm äußerem, 3,5 mm innerem Durchmesser und etwa je 3 cm Länge über einer Röhrenfeder zusammengeschoben und eine Vorspannung ausgeübt. Dabei liegt zwischen ihnen ein Metallring, um die Kraft des Endtellers auch auf den zweiten Quarz sicher und gleichförmig zu übertragen. Elektrisch werden die Quarze so gekoppelt, daß die sehr dünnen Metallagen der äußeren Quarzflächen durch einen elastischen und aufgeschnittenen Metallring verbunden werden. Die inneren leitenden Flächen sind wie beschrieben durch die Röhrenfeder, auf der diese anliegen, geerdet. Abb. 4 bringt eine Skizze. Die übrige Anordnung ist ganz ähnlich wie bei den schon beschriebenen Geräten.

4. Auswertung der Versuchsergebnisse. Man kann die Ergebnisse, die bei stationären Strömungen gewonnen wurden, auch für diese Geräte zur Bestimmung von Pitotdruck verwenden, also die Einflüsse der verschiedenen Formen für die unterschiedlichen Gasgeschwindigkeiten benützen, ebenso etwa die Abhängigkeit der Anzeige vom Winkel der Strömungsrichtung zur Geräteachse. Weiter die bekannten Auswertemethoden um die Gasgeschwindigkeiten zu erhalten für die einzelnen Zeitelemente anwenden[4, 5, 6, 7].

Bei Unterschallgeschwindigkeiten, bei der die Strömungsgeschwindigkeiten kleiner als die Laval- oder kritischen Geschwindigkeiten sind, mißt man beim Aufstau mit einem Gerät dieser Art den der kinetischen Energie entsprechenden Druck (Kesseldruck). Bei Überschallgeschwindigkeiten tritt vor dem Pitotrohr ein Verdichtungsstoß auf, und man erhält einen niedereren Druck.

Um aus den Pitotdrucken etwa die Gasgeschwindigkeiten erhalten zu können, sind noch die Molekulargewichte der Gase, die Temperaturen und die statischen Drucke in der ungestörten Strömung nötig. Diese können mit den in folgenden beschriebenen Geräten bestimmt werden. Im allgemeinen kann man bei den verschiedenen Strahlantrieben das Molekulargewicht ziemlich genau abschätzen, auch Rauchgasanalysen durchführen.

Bei pulsierenden Strahltriebwerken wußte man z. B. aus Flammenaufnahmen, daß beim Ausstoß der Gasmassen in jeder Periode zuerst Luft ziemlich gewöhnlicher Temperatur ausgeschoben wird, dann erst leuchtende Gase. Trägheitslose Bestimmungen der veränderlichen Temperaturen sind hier möglich mit Hilfe von Photozellen, indem man etwa wenig Kalium dem Kraftstoff beimischt. Dabei geht man davon aus, daß thermodynamisches Gleichgewicht in den leuchtenden Gasen vorhanden ist[8]. Doch kann dies angenommen werden, da selbst bei raschen Ausströmungsvorgängen, z. B. aus Raketenbrennkammern, jeweils der Gleichgewichtszustand praktisch erreicht wird[9, 10].

An allen Strahlantrieben treten instationäre Zustände auf, bei Strahlturbinen besonders in der Nachverbrennung, bei Raketen und Staustrahltriebwerken. Doch läßt sich eine Bestimmung der Pitot- und statischen Drucke auch bei weitgehend stationärem Verlauf der Gasgeschwindigkeiten über die Querschnitte so durchführen, daß man vom Rand des Strahls aus zur Achse die Meßgeräte hereinführt. Eine nicht zu hohe Einführungsgeschwindigkeit stört wenig, da die Strahlgeschwindigkeiten im Vergleich dazu wesentlich höher sind. Dazu können diese Störeinwirkungen auch rechnerisch erfaßt werden.

Die Eigenschwingungszahlen von Hohlzylinderanordnungen der hier verwendeten Art sind verhältnismäßig hoch. Versuchsergebnisse darüber, die mit Hilfe von Ausschwingkurven erhalten

[1] *W. Wien* und *F. Harms*, Handbuch der Experimentalphysik Bd. IV, 1. Teil S. 489. Leipzig 1931.
[2] *O. Walchner*, Jb. 1938 d. Dtsch. Luftfahrtforschung, S. I 578.
[3] *D. J. Kettle*, J. Roy. Aeron. Soc. 58 (1954) S. 835.
[4] *W. Wien* und *F. Harms*, Handbuch der Experimentalphysik Bd. IV, 1. Teil S. 376. Leipzig 1931.
[5] *K. Oswatitsch*, Gasdynamik, Wien 1952.
[6] *Hütte* Bd. I, 28. Aufl.: *A. Betz*, Mechanik elastischer Flüssigkeiten S. 825. Berlin 1955.
[7] *E. Schmidt*, Einführung in die Technische Thermodynamik. 6. Aufl. Kap. XIII. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1956.
[8] *H. Graff*, Luftfahrtforschung 18 (1941) S. 8.
[9] *O. Lutz*, Z. Flugwiss. 3 (1955) S. 151.
[10] High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion II (1955) Princeton University Press: Combustion Processes, *B. Lewis*, *R. N. Pease*, *H. S. Taylor*, S. 23.

wurden, liegen nicht mehr vor. Doch kann man nach den vorliegenden Erfahrungen schließen[1], daß Vorgänge von vielen Hertz noch gut erfaßt werden können.

Es ist ein geringer Zeitunterschied vorhanden zwischen dem Eintreffen einer Druckänderung an der Spitze des Meßgerätes zur Bestimmung des Pitotdruckes gegenüber dem Ankommen dieser Druckänderung beim Endteller der Röhrenfeder. Doch ist dieser Zeitunterschied, entsprechend der Raschheit einer Druckausbreitung, sehr gering, wenn der Weg von der Spitze zum Endteller nicht zu lang ist. Man wird diesen auch deshalb nicht zu groß wählen, um Reibungs- und Turbulenzeinflüsse, ebenso die Einwirkungen von Schwingungen, möglichst klein zu halten.

Eine statische Eichung mit Hilfe eines Gases, das mit verschiedenem Druck auf das Quarzgerät gegeben wird, ist zumeist möglich, da dessen Eigenschwingungszahlen verhältnismäßig hoch liegen gegenüber dem aufzunehmenden Vorgang. Außerdem sind Ladungsverluste durch einen hohen Isolationswiderstand des Eingangskreises im Verstärker klein, so daß genügend große Zeitkonstanten erhalten werden. Bei den Meßgeräten mit ebener Vorderfläche ist auch näherungsweise eine Eichung mit Gewichten möglich. Doch kann eine solche im Windkanal wertvoll sein. Es ist dazu möglich, eine Eichung mit Hilfe von Flammenaufnahmen durchzuführen auch bei veränderlichen Zuständen. Eine dynamische Eichung ist auch sonst unter Umständen möglich.

Die Anzeigen der Geräte für den atmosphärischen Druck, die als Ausgangslinien dienen können, sind zumeist rasch zu erhalten, indem man diese z. B. bei Beginn der Aufnahme oder am Ende aufzeichnet. Man weiß auch häufig, wo in den Druckverläufen, z. B. bei pulsierenden Strahltriebwerken, der atmosphärische Druck erreicht wird.

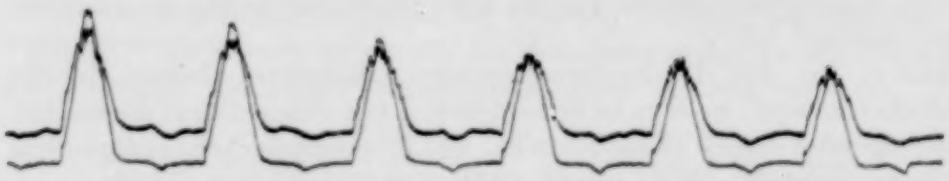

Abb. 5. Unten: Verlauf des statischen Druckes beim Austritt eines Luftstrahles, gemessen am Rohrrand. Oben: Verlauf des vorzugsweisen Pitotdruckes in einem Luftstrahl beim Rohrausgang.

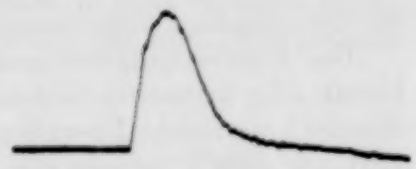

Abb. 6. Verlauf des vorzugsweisen Pitotdrucks in einem Luftstrahl beim Rohrausgang.

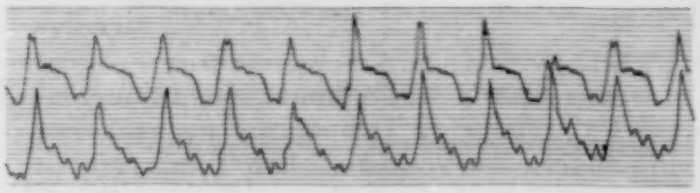

Abb. 7. Oben: Verlauf des statischen Druckes am Rohrrand beim Auspuff eines pulsierenden Strahltriebwerkes, aufgenommen mit einem üblichen Druckelement. Unten: Verlauf des vorzugsweisen Pitotdrucks, aufgenommen im Strahl mit einem piezoelektrischen Meßgerät, das vorne eben war.

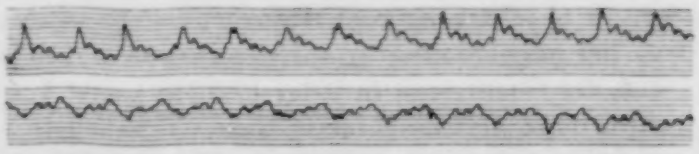

Abb. 8. Oben: Verlauf des Pitotdruckes im Strahl eines pulsierenden Strahltriebwerkes, aufgenommen mit einem piezoelektrischen Meßgerät mit halbkugelförmigem vorderem Teil. Unten: Verlauf des statischen Druckes aufgenommen im Strahl eines pulsierenden Strahltriebwerkes.

5. Aufnahme des Verlaufs des Pitotdruckes in einem Luftstrahl und beim Auspuff eines pulsierenden Strahltriebwerkes. Die Untersuchungen wurden so durchgeführt, daß auf der einen Seite eines Kugelschiebers Überdruck herrschte, der langsam kleiner wurde (30 atü maximal). Die Druckwellen breiten sich bei der Drehung des Kugelschiebers in einem 4,60 m langen Rohr von 8 cm Durchmesser aus und kommen dann ins Freie. Abb. 5 zeigt unten — es ist die hellere Linie — den Verlauf des statischen Drucks, wenn er fast am Ende des Rohres an seinem Rande mit Hilfe eines üblichen Druckelementes, eines sogenannten Niederdruckgebers, bestimmt wurde. Zur Aufnahme wurde ein Schleifenoszillograph verwendet.

Oben in Abb. 5 ist im wesentlichen der Verlauf des Pitotdruckes beim Rohrausgang aufgezeichnet. Hier wurde ein vorne ebenes Meßgerät benutzt. Die Aufnahmeverfahren bei beiden Kurven sind ziemlich verschieden, entsprechend der verschiedenen Art des aufgenommenen Druckes. Die Übereinstimmung ist trotzdem gut, soweit dies möglich sein kann.

Abb. 6 bringt die Aufnahme vorherrschend des Pitotdrucks mit demselben Meßgerät, wobei eine Oszillographenschleife höherer Eigenschwingungszahl verwendet wurde. Man erkennt, daß kaum Störungen vorhanden sind.

Im folgenden werden einige Aufnahmen gebracht, die beim Auspuff eines pulsierenden Strahltriebwerkes von 14 cm Durchmesser gewonnen wurden. Bei diesen Triebwerken wird am Ende

[1] Siehe I § 5 des in Fußnote 7 von Seite 404 genannten Buches.

einer Periode, die etwas mehr als $^1/_{50}$ sek. dauert, Frischluft in das Rohrende eingezogen. Diese wird dann zuerst ausgestoßen, wobei für kurze Zeit Überschallgeschwindigkeiten erreicht werden. Dies gibt den steilen Anstieg des Pitotdruckverlaufes. Hierauf werden verbrannte leuchtende Gase ausgeschoben.

Abb. 7 zeigt unten ein Oszillogramm, welches mit einem der beschriebenen piezoelektrischen Meßgeräte zur Aufnahme des vorzugsweisen Pitotdruckes gewonnen wurde, bei welchem der vordere Teil eine Ebene bildete. Oben in Abb. 7 ist der statische Druck am Rohrrand fast am Ende des Rohres mit einem üblichen Druckgeber aufgezeichnet. Auch hier sieht man, daß das Meßgerät den Vorgängen zu folgen vermag. Die scharfen Spitzen entsprechen nicht dem wirklichen Strömungsverlauf, sie rühren von der Aufnahmetechnik her; denn die Eigenfrequenz der verwendeten Schleife war nicht sehr hoch.

Abb. 8 zeigt oben dieselbe grundsätzliche Anordnung zur Bestimmung des Pitotdruckes. Doch ist der vordere Teil des Meßgerätes hier abgerundet mit einer Öffnung in der Mitte. Diese Aufnahme wurde mit einer Oszillographenschleife höherer Eigenschwingungszahl durchgeführt, und sie stimmt mit dem wirklichen Strömungsverlauf überein, der sich aus Flammenaufnahmen ergab. Unten in Abb. 8 ist der statische Druck mit einem Meßgerät aufgenommen, das wie sonst bei stationären Aufnahmen seitliche Schlitze besaß. Erhöhungen des statischen Druckes gehen hier nach unten.

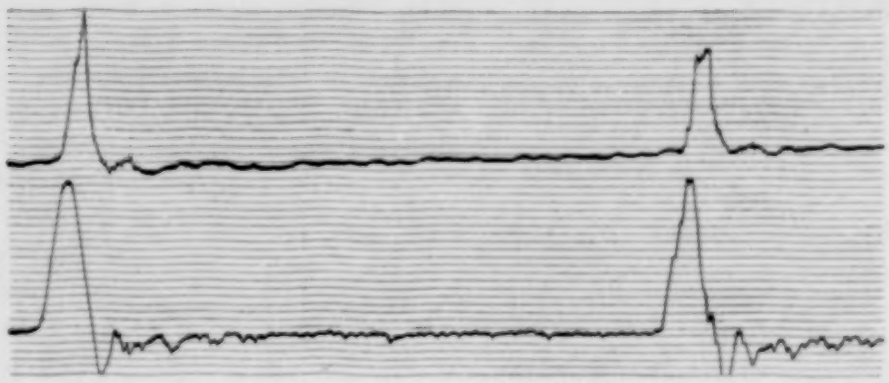

Abb. 9. Oben: Vorherrschender Pitotdruckverlauf beim Auspuff eines pulsierenden Strahltriebwerkes mit gesteuerten Lufteinlaßklappen. Unten: Verlauf des statischen Druckes in der Brennkammer.

In Abb. 9 oben ist der Verlauf des vorherrschenden Pitotdruckes aufgezeichnet am Auspuff eines Triebwerkes mit einem Meßgerät, das vorne eben war. Dieses Triebwerk arbeitete mit gesteuerten Lufteinlaßklappen. Unten ist der Verlauf des statischen Druckes in der Brennkammer zu sehen.

Wenn auch nur wenige Aufnahmen noch vorliegen, so zeigen sie doch, daß Meßgeräte dieser Art gut brauchbar sind.

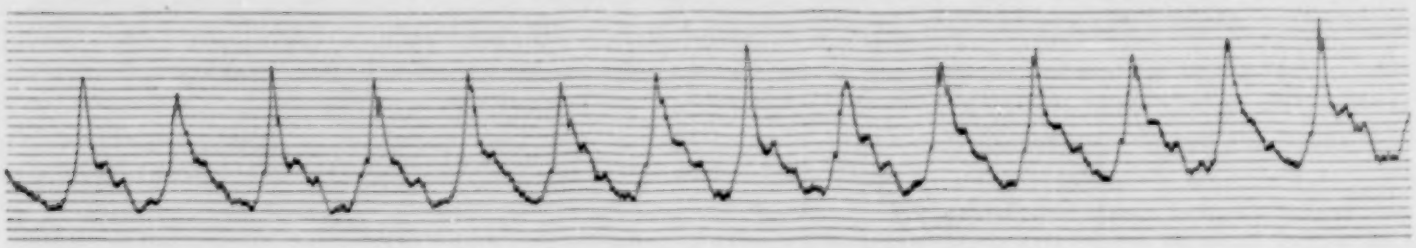

Abb. 10. Temperatureinwirkung bei einem Meßgerät zur Bestimmung des vorzugsweisen Pitotdruckverlaufes im Strahl mit ebener Vorderfläche.

6. Temperatureinwirkungen. In den Strahlen der verschiedenen Strahlantriebe können ziemlich hohe Temperaturen auftreten. Bei Strahlturbinen sind diese etwa um 600° C, bei Verwendung der Nachverbrennung wesentlich höher. Bei pulsierenden Strahltriebwerken betragen die maximalen Temperaturen rund 1500° C. Hier strömt jedoch bei jeder Periode zweimal Luft von fast gewöhnlicher Temperatur an den Meßgeräten vorüber. Bei Staustrahltriebwerken und Raketen sind die Temperaturen im allgemeinen höher.

Abb. 10 zeigt eine Aufnahme des Pitotdruckverlaufes im wesentlichen mit einem Meßgerät, das vorne eben war. Durch das Röhrchen in der Röhrenfeder bis fast vorne in den Abschlußteller hinein dringt Kühlwasser. Man sieht deutlich aus der Aufnahme, die kurz nach Beginn des Laufes eines pulsierenden Strahltriebwerkes gewonnen wurde, daß sich die Aufzeichnungen der einzelnen Perioden kaum ändern. Dagegen verschiebt sich die Linie auf dem Oszillogramm, durch welche Atmosphärendruck angezeigt wird. Um das zu verhindern, könnte man mehr Kühlwasser durchfließen lassen, auch die Verstärkereinstellung regeln. Man könnte auch Kühlwasser durch die äußere Gerätewand führen. Doch genügt im allgemeinen eine Aufnahme über kurze Zeit.

Abb. 11 bringt oben die Aufzeichnung des Pitotdruckes mit einem Meßgerät, das vorne halbkugelförmig war und eine Durchbohrung besaß. Hier sind die Einwirkungen geringer. Unten ist die Aufnahme des statischen Druckes mit einem Meßgerät zu sehen, dessen Vorderteil verlängert war, wie üblich, und das drei seitliche Schlitze hatte, durch welche der statische Druck wirksam war. Erhöhungen dieses Druckes sind ebenfalls nach unten aufgezeichnet.

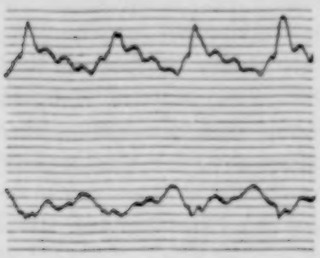

Abb. 11. Oben: Temperatureinwirkung bei einem Meßgerät zur Bestimmung des Pitotdruckverlaufes im Strahl mit halbkugelförmigem Vorderteil. Unten: Temperatureinwirkung bei einem Meßgerät zur Bestimmung des statischen Druckes im Strahl mit Hilfe seitlicher Schlitze nach einer kegelförmigen Spitze.

7. Aufzeichnung des veränderlichen statischen Druckes. Zusammen mit den Aufzeichnungen des Pitotdruckverlaufes wurden schon Aufzeichnungen gebracht, welche den veränderlichen statischen Druck zeigten. Die Meßgeräte dazu sehen äußerlich ganz ähnlich aus wie ein Hakenrohr für stationäre Strömungen und sind wirksam wie die seither beschriebenen piezoelektrischen Geräte[1]. Es sind wieder Doppelquarze vorhanden. Senkrecht zur Achse des Gerätes sind Schlitze oder Anbohrungen angebracht, soweit von der Spitze entfernt, daß diese keinen merklichen Einfluß mehr auf die Aufnahme des statischen Druckes haben kann.

Abb. 12 zeigt den Aufbau eines Meßgerätes. Es wird wieder eine Röhrenfeder *2* mit Abschlußteller *3* benützt, der einen hohlen zylindrischen Doppelquarz gegen ein Widerlager drückt. Teil *10* ist eine Spitze. Die Schlitze *13* müssen so breit sein, daß rasche Änderungen des statischen Druckes zum Abschlußteller *3* zu dringen vermögen. Dazu wurden Untersuchungen durchgeführt. So haben sich etwa 3 Schlitze *13* mit Zwischenstücken geringer Ausdehnung und einer Breite von 1 mm oder etwas weniger, als brauchbar erwiesen.

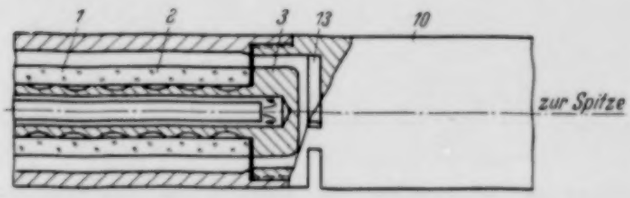

Abb. 12. Meßgerät zur Bestimmung des veränderlichen statischen Drucks.
1 Hohlzylinderdoppelquarz, *2* Röhrenfeder, *3* Abschlußteller, *10* Vorderteil, 13 seitliche Schlitze.

8. Geräte geringeren äußeren Durchmessers ohne Kühlung. Man kann die Kühlung weglassen und Meßgeräte bauen, die als piezoelektrische Teile stabförmige Gebilde besitzen, etwa solche von 1 mm Dicke, 2 mm Breite und einigen cm Länge. Man erhält so Meßgeräte geringeren Durchmessers. Auch hier gibt es verschiedene Konstruktionsmöglichkeiten. Man kann eine dünne

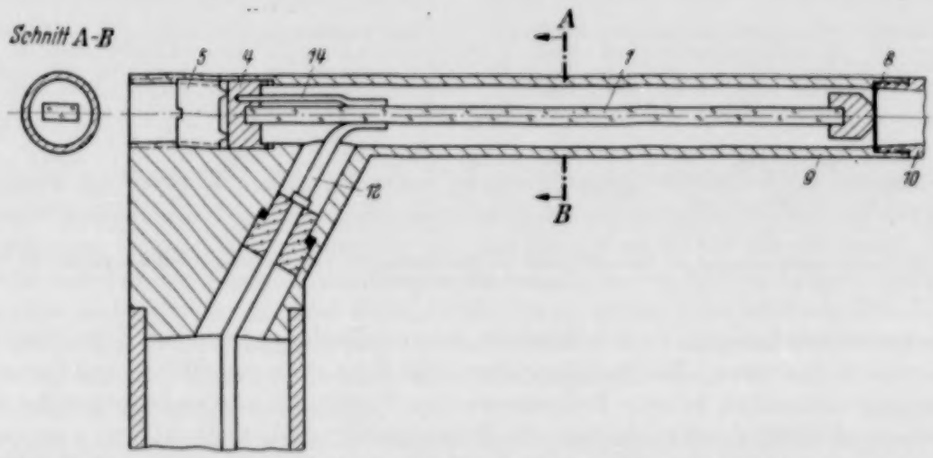

Abb. 13. Meßgerät zur Bestimmung der veränderlichen Pitotdrucke oder statischen Drucke unter Verwendung eines Quarzstabes. Die Abschlußmembran rechts wird als Vorspanneinrichtung verwendet.
1 stabförmiger Quarz, *4* Widerlager, *5* Vorspannschraube, *8* elastische Membran, *9* Gehäuse, *10* Vorderteil.

elastische Membran als Abschluß und gleichzeitig als Vorspanneinrichtung benützen. Dies hat den Nachteil, daß sie Temperaturschwankungen ausgesetzt ist und so ihre Vorspannung ändert. Doch ist es möglich, solche Meßanordnungen für Gase mit geringen Temperaturschwankungen zu verwenden. Indessen ist es auch vorteilhaft, hier zu Anordnungen überzugehen, bei denen die Vorspannung ähnlich erzeugt wird, wie bei den schon beschriebenen Meßgeräten.

[1] *F. Staab*, Gerät zur Messung des statischen Drucks in einer pulsierenden Strömung, FKFS-Bericht 1944.

In Abb. 13 ist *1* ein stabförmiger Quarz; *8* ist eine elastische Membran, welche wieder mit dem Vorderteil *10* des Meßgerätes auf das Gehäuse *9* angepreßt wird. Ein wenig in Achsenrichtung verschiebbares Widerlager *4* und eine Schraube *5* bilden die Vorspanneinrichtung, und *12* ist die Leitung zum Verstärker, die mit einer Belegung des Quarzes *1* verbunden ist. Die andere Belegung ist mit Hilfe des Leitungsteiles *14* geerdet.

Die Empfindlichkeit eines solchen Quarzstabes ergibt sich wieder aus der Größe des transversalen piezoelektrischen Effektes nach (1). Verwendet man denselben wirksamen Druck, dann erhält man gleiche Elektrizitätsmengen, wenn das Verhältnis der Ausdehnungen des Quarzstabes in y- und x-Richtung gleich sind. Dieses Verhältnis kann ohne Schwierigkeit etwas größer genommen werden. Doch ist zu beachten, daß im allgemeinen der wirksame Druck auf die elastische Membran und auf den Quarz etwas geringer ist.

Es ist auch hier möglich, diese Anordnungen zur Bestimmung des veränderlichen statischen Druckes im Strahl zu verwenden. Man muß nur in dem Meßgerät einen entsprechend ausgebildeten Kopf einschrauben. Geräte dieser Art können bis zu einem Durchmesser von einigen wenigen mm ausgeführt werden.

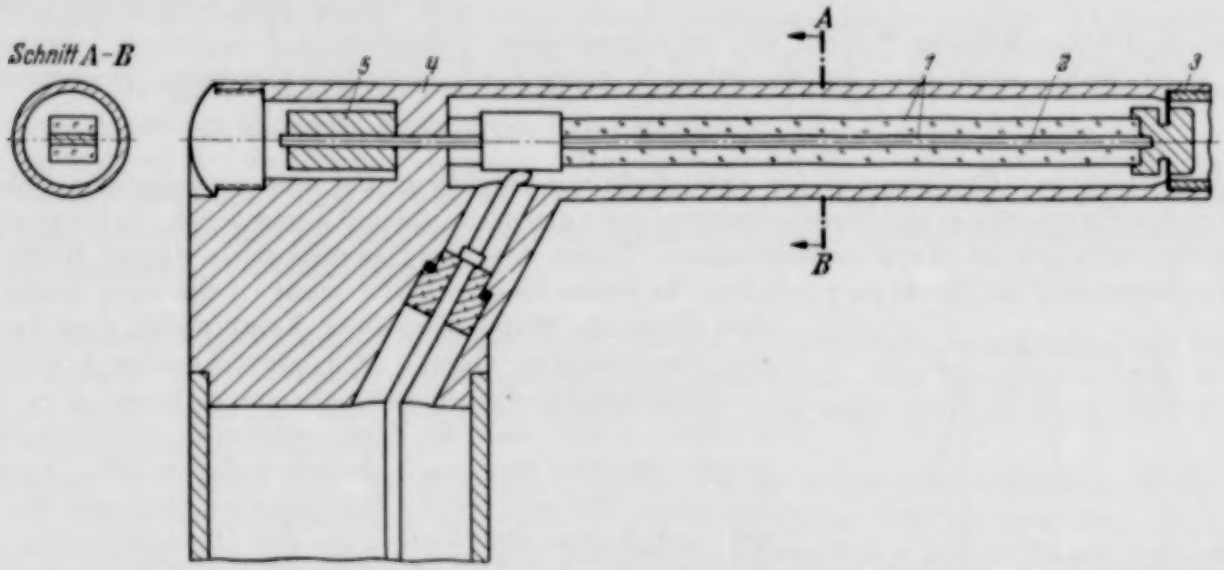

Abb. 14. Meßgerät zur Bestimmung der veränderlichen Pitotdrucke oder statischen Drucke mit einer Vorspanneinrichtung links. *1* zwei stabförmige Quarze, *2* Vorspannmetallbänder, *3* Abschlußstück, *4* Widerlager, *5* Vorspanneinrichtung.

Abb. 14 zeigt noch eine Konstruktion, die prinzipiell ähnlich ist wie die seither beschriebenen. Diese Geräte können ohne Wasserkühlung oder auch mit einer solchen ausgeführt werden. Es sind *1* zwei in kleinem Abstand parallel gestellte stabförmige Quarze, an deren inneren Seitenflächen ein- oder zwei dünne Metallbänder *2* anliegen, die zur Vorspannung der Quarze dienen. Diese werden auf das Lager *4* gedrückt durch eine Vorspanneinrichtung *5*, die verschieden ausgebildet sein kann. Die weitere Anordnung ist den seitherigen gleich. Die Quarze *1* sitzen in einem Abschlußstück *3*, mit welchem eine ausgeglühte dünne Membran fest verbunden ist.

Hier ist eine Anordnung ohne Kühlung eingezeichnet. Es ist jedoch auch möglich, zwischen den Metallbändern *2* eine umgebogene Kühlleitung einzuschieben oder anstatt der Seitenbänder eine elastische Kühlleitung zu verwenden. Es ist auch möglich, durch den äußeren Gehäuseteil Kühlwasser zu leiten. Man kann auch etwa drei Quarzstäbe benützen und diese in der Art eines gleichseitigen dreiseitigen Hohlprismas anordnen.

Es ist außerdem möglich, diese verschiedenen Konstruktionen den unterschiedlichen Anwendungen anzupassen, ebenso entsprechende Verstärker und geeignete Aufzeichnungsapparate zu verwenden.

9. Staurohr. Man kann weiter ein Meßgerät bauen, das gleichzeitig Pitotdruck und statischen Druck aufnimmt und als Ergebnis die Differenz, den dynamischen Druck, liefert. Dazu ist es nötig, wie im stationären Fall von Pitotdruck den statischen Druck abzuziehen.

Abb. 15 bringt die Anordnung. Rechts ist das Gerät, welches den Pitotdruck aufnimmt, weiter links das Gerät zur Aufnahme des statischen Druckes mit den seitlichen Schlitzen. Man kann nun zwei Quarzanordnungen verschiedener Polung mit gleicher Empfindlichkeit für Druckbeanspruchung verwenden und so verfahren, daß man etwa die außen entstehenden positiven Ladungen des Quarzes links zu den negativen des Quarzes rechts hinzufügt. Anstatt der Quarzstäbe kann man auch Hohlzylinderquarze anwenden.

Da es umständlich sein kann, zwei Quarzelemente mit einer gewissen Genauigkeit so abzugleichen, daß ihre Eichkurven entgegengesetzt gleich sind und gleich bleiben, kann man die Differenzbildung der entstehenden elektrischen Ladungen auch elektrisch vornehmen. Man könnte die beiden entgegengesetzt gepolten Quarzelemente über einen Differentialkondensator an einen Verstärker anschließen und ihre verschiedene Empfindlichkeit durch Einstellung des Differentialkondensators ausgleichen. Es ist weiter möglich, zwei getrennte Eingangsröhren zu benützen und einen gemeinsamen Anodenwiderstand. Die Empfindlichkeit der beiden Quarze kann hier durch zwei getrennte Kapazitäten unabhängig voneinander abgeglichen werden. Außerdem ist es möglich, zwei Quarze gleicher Polung zu benützen und die Differenzbildung durch eine Umkehrröhre hervorzurufen, die hinter einer der beiden Eingangsröhren Verwendung findet. Ebenso können Röhren mit entgegengesetzt verlaufenden Kennlinien Anwendung finden. Man sieht, auch hier ist es möglich weitgehend den Anforderungen Rechnung zu tragen.

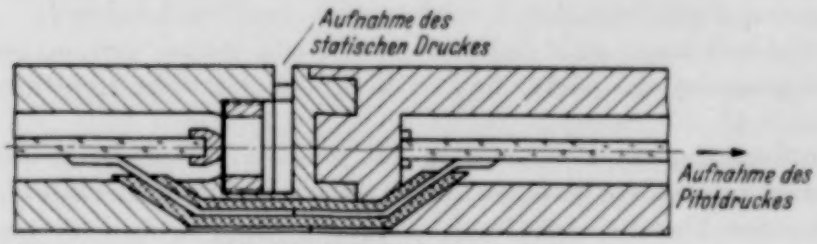

Abb. 15. Piezoelektrisches Staurohr.

10. Meßgeräte zur Bestimmung des veränderlichen Impulses. Bei steil ansteigenden Pulsationen ist es häufig schwierig, mit Dynamometern etwa den gesamten mittleren durch ein Strahltriebwerk erzeugten Schub im Stand zu bestimmen. Daher liegt der Gedanke nahe, diesen direkt aus einer Impulsmessung im Strahl zu gewinnen. In jedem kleinen Zeitelement ist die vom Strahl auf den Motor im Stand ausgeübte Kraft gleich dem Impuls der austretenden Gase. Den entstehenden Impuls in Achsenrichtung des Strahltriebwerkes kann man vernichten, indem man die Gase senkrecht zu einer Prallplatte ablenkt und nach außen strömen läßt. Voraussetzungen für eine solche Messung sind, daß sich die Geschwindigkeiten der Gase von der Düsenmündung des Strahltriebwerkes bis zum Auftreffen auf die Prallplatte durch Einwirkungen der umgebenden Luft nicht ändern. Außerdem dürfen keine nennenswerten Druckunterschiede zwischen Vorder- und Rückseite der Prallplatte entstehen. Es ist dazu unter Umständen zu beachten, daß der statische Druck in der Düsenmündung höher als der atmosphärische Druck sein kann.

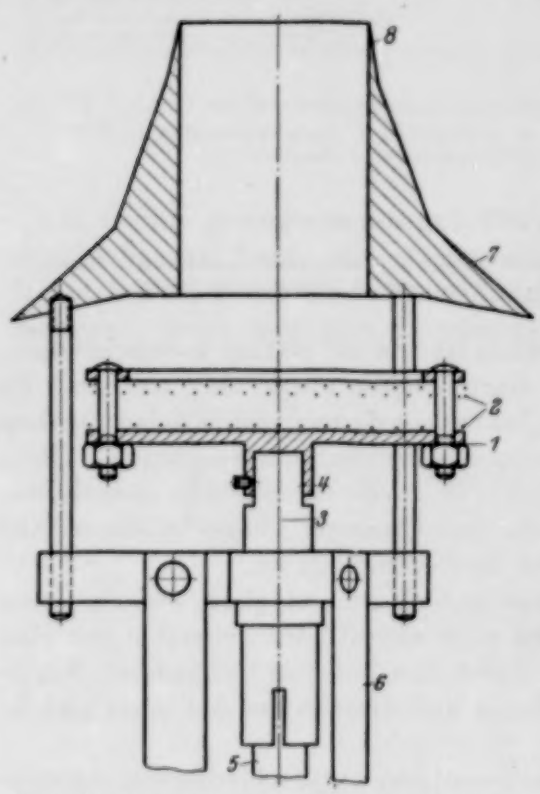

Abb. 16. Meßeinrichtung zur Bestimmung des veränderlichen Impulses im Strahl einer pulsierenden Strömung. *1* Prallplatte, *2* Netzbelege, *3* Quarzelemente, *4* Vorspannhülse, *7* und *8* Teile der Strömungsleitungseinrichtung.

Es wurden Versuche mit einer glatten Prallplatte durchgeführt. Doch kann dann eine größere Ablenkung des Strahls als 90° auftreten. Abhilfe davon wird geschaffen, wenn man auf die Prallplatte rund 10 Lagen von Netzgeflecht mit einer Maschenweite von einigen mm auflegt. Bei Versuchen dieser Art, bei denen aus einem Rohr auf eine Prallplatte ein Strahl auftraf, erhielt man bei stationärer Strömung genaue Übereinstimmung zwischen der berechneten Bewegungsgröße und dem gemessenen Schub. Ebenso bekam man genügend genaue Mittelwerte bei Pulsationen nicht zu hoher Frequenz. Der gemessene Schub vermehrt sich dazu kaum, wenn man den Abstand zwischen Mündung und Prallplatte beträchtlich vergrößert [1].

Bei einem Strahl etwa von 50 cm Durchmesser kommt es darauf an, die Gesamtströmung so wenig als möglich zu stören. Daher ist es vorteilhaft, einen Strahl geringeren Durchmessers aus dem Gesamtstrahl herauszunehmen. Wertvoll ist es dazu, die Kraftaufnahme so durchzuführen, daß in jedem Augenblick der veränderliche Impuls angezeigt wird. Messungen dieser Art können dazu über die gesamte Düsenmündungsfläche durchgeführt werden, indem man das Gerät in verschiedenen Abständen zur Achse aufstellt.

[1] Siehe Fußnote 9 von Seite 404.

Zu diesem Zweck wurde in Abb. 16 eine Prallplatte *1* der angedeuteten Art mit Netzbelegen *2* auf ein Quarzelement *3* gesetzt und fest verbunden[1]. Das Quarzelement besteht aus einer Vorspannhülse *4*, die in üblicher Weise einzelne Quarzplättchen enthält. Dieser Teil des Meßelementes wurde aus der sonst dazu benützten Hülle eines vorhandenen Druckmeßgerätes herausgenommen, welche noch die Kühlwasserzuführung trägt und das Gewinde, um das Element in einen Motor einzuschrauben[2]. Es war also unnötig das Quarzelement besonders herzustellen. Ferner stellt *5* das Kabel zum Verstärker dar. Mit Haltebändern *6*, die zur Strahlachse parallel verlaufen, wird die ganze Anordnung gehalten.

Vor der Prallplatte ist eine durchbohrte, kegelartige Einrichtung *7* vorhanden, um einen Teil der Strömung herauszunehmen. Auf diese Weise wird ein Strahlteil bestimmten Durchmessers aus dem Gesamtstrahl des Strahltriebwerkes herausgeschnitten. Der hier gezeichnete scharfe Teil *8* kann auch unter Umständen durch einen abgerundeten Vorderteil ersetzt werden. Mit dieser Anordnung *7* wird das Ausströmen der Gase parallel zur Prallplatte durch die Netze *2* und senkrecht zur Achse gefördert.

Die Vorteile dieser Anordnung sind, daß man auf diese Weise den zeitlich abhängigen Impuls des Strahles aufzeichnen kann, auch unter Berücksichtigung dessen geringer Abhängigkeit vom Achsenabstand. Man vermag daraus weiter rasch den Mittelschub zu bestimmen. Eine Eichung mit Gewichten gibt dazu bei nicht zu hohen Frequenzen brauchbare Werte. Die Störung der Gasströmung durch das Meßgerät kann abgeschätzt werden.

Geräte dieser Art wurden mit wenigen cm Durchmesser des Strömungsquerschnittes bei größeren Strahltriebwerken mit Erfolg verwendet. Bei gewöhnlichen pulsierenden Strahltriebwerken erhielt man gute Übereinstimmung mit Dynamometerangaben. Ebenso waren diese Anordnungen brauchbar bei rascheren Verbrennungen.

11. Weitere Entwicklungen. Für die verschiedenen Anwendungen lassen sich diese Meßgeräte in genügender Weise verändern und entsprechend einrichten. Man hat gegenwärtig auch Verstärkereinrichtungen, die einen höheren Verstärkungsfaktor besitzen[3] und kann Verstärker den Anforderungen entsprechend bauen.

Ebenso ist es unter Umständen möglich, anstatt Quarz andere piezoelektrische Stoffe zu verwenden mit höherem Piezomodul oder größerer piezoelektrischer Druckkonstanten. Man kann so die Geräte klein bauen und sie für sehr hohe Frequenzen anwendbar machen. So hat das neuerdings für gewisse Zwecke häufig verwendete Bariumtitanat einen wesentlich höheren Piezomodul als Quarz, doch auch eine starke Abhängigkeit der Empfindlichkeit von der Temperatur[4]. Aus diesen Gründen scheint das weniger temperaturempfindliche Keramikelement Zirkonat für viele Anwendungen geeigneter zu sein[5]. Ebenso kann Seignettesalz gelegentlich Anwendung finden. Lithiumsulfat besitzt eine noch höhere piezoelektrische Druckkonstante[6].

12. Zusammenfassung. Piezoelektrische Meßgeräte der beschriebenen Art zur Bestimmung des veränderlichen Pitotdrucks, des statischen Drucks, des dynamischen Drucks und der veränderlichen Bewegungsgröße bei pulsierenden Strömungen haben sich gut bewährt, und es erscheint möglich, diese noch weiter den verschiedenen Aufgaben anzupassen.

Die hier beschriebenen Meßanordnungen wurden 1941 bis 1944 im Forschungsinstitut für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart (FKFS) entwickelt. Sie wurden bei Entwicklungsarbeiten einst auf allen Versuchsplätzen für pulsierende Strahltriebwerke (z. B. V1-Triebwerk) angewendet.

Für die Ermöglichung der Neubeschäftigung mit diesen Fragen wird der Deutschen Forschungsgemeinschaft auch an dieser Stelle sehr gedankt.

(Eingegangen am 21. Januar 1957)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *F. Staab*, Reichenbach a. d. Fils (Württ.), Ziegelhof 2

[1] *F. Staab*, Gerät zur Bestimmung des veränderlichen Impulses im Strahl einer pulsierenden Strömung. FKFS-Bericht 1943.
[2] Siehe Fußnote 6 von Seite 404.
[3] *Dr. Staiger* und *Mohilo*. Stuttgart-Bad Cannstatt.
[4] Brush Electronics Company, Piezotronic Technical Data (1956).
[5] Atlantic Research Corporation 1956.
[6] Vgl. das in Fußnote 2 von Seite 406 genannte Buch, Kap. II.

Beitrag zur Berechnung räumlich gekrümmter Stäbe nach der Theorie erster Ordnung

Von **R. Trostel**

1. Allgemeines. Das Ziel jeder statischen Berechnung ist die Dimensionierung eines Tragwerkes für eine gegebene Belastung. Die Grundlage hierfür bildet die Kenntnis der Spannungen und gegebenenfalls auch der Deformationen, deren Extremalwerte man gewissen zulässigen Höchstwerten gegenüberstellt. Einer Dimensionierung muß daher in jedem Falle die Ermittlung des Spannungsverlaufes und möglicherweise auch der Deformationen des Tragwerkes vorangehen.

Es ist einleuchtend, daß die komplizierte Natur der Tragwerke nur eine näherungsweise Bestimmung dieser Größen zuläßt dergestalt, daß man den zu untersuchenden Gebilden gewisse idealisierende Eigenschaften zuschreibt, die eine erhebliche Vereinfachung des mathematischen Aufwandes ermöglichen. So begnügt man sich beispielsweise hinsichtlich der Deformationen mit den Formänderungen einer als Systemlinie bezeichneten gedachten Balkenachse, während man hinsichtlich der Spannungen vermöge geeigneter Näherungsannahmen über die Deformationen der einzelnen Stabelemente vollkommen ausreichend durch die Kenntnis ihrer statischen Äquivalenten, die man als Schnittlasten bezeichnet, informiert ist. Die nachfolgenden Ausführungen werden daher die Ermittlung der Schnittlasten sowie der Deformationen der Systemlinie zum Gegenstand haben.

Bei der Bearbeitung statischer Probleme unterscheidet man zwei grundsätzlich verschiedene Betrachtungsweisen. Die einfachere setzt die am System auftretenden Deformationen hinsichtlich der Lage der Lasten als vernachlässigbar klein gegenüber den Systemabmessungen voraus, so daß sämtliche Schnittlasten am unverformten System berechnet werden können. Dieser Theorie erster Ordnung steht eine genaue Theorie gegenüber, bei der die Schnittlasten von vornherein für das verformte System bestimmt werden. Naturgemäß ist diese Problematik wesentlich schwieriger, und eine Lösung gelingt nur für spezielle Fälle mit erträglichem Rechenaufwand. Wir wollen nachfolgend nur die Theorie erster Ordnung zum Gegenstand der Untersuchung machen.

Die maßgebenden Gleichungen für eine statische Berechnung sind die aus den allgemeinen Bewegungsgleichungen

$$\Sigma\, \mathfrak{K}_i = m\, \ddot{\mathfrak{r}}_s\,, \qquad \Sigma\, \mathfrak{M}_i = \frac{d}{dt} \int \mathfrak{r} \times \dot{\mathfrak{r}}\, dm$$

für den Fall beschleunigungsloser Vorgänge sich ergebenden Gleichgewichtsbedingungen

$$\Sigma\, \mathfrak{K}_i = 0\,, \qquad \Sigma\, \mathfrak{M}_i = 0 \tag{1a, b}$$

sowie spezielle Formänderungsrelationen.

Die mathematische Darstellung der Systemlinie ist mittels eines, von einem skalaren Parameter t abhängigen Ortsvektors

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t) = \{x(t); y(t); z(t)\} \tag{2}$$

möglich. In jedem Punkte einer solchen Raumkurve sind drei zueinander orthogonale Richtungen durch die Einheitsvektoren[1]

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{e}_\xi = \frac{\dot{\mathfrak{r}}(t)}{|\dot{\mathfrak{r}}(t)|} = \frac{\dot{\mathfrak{r}}(t)\, dt}{|\dot{\mathfrak{r}}(t)|\, dt} = \frac{d\mathfrak{r}}{ds}\,, \qquad \mathfrak{n} = \mathfrak{e}_\eta = \frac{d\mathfrak{t}/ds}{|d\mathfrak{t}/ds|}\,, \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{e}_\zeta = \mathfrak{t} \times \mathfrak{n} \tag{3a, b, c}$$

definiert. Von diesen interessieren im Hinblick auf die Berechnung der Deformationen noch die Ableitungen nach der Bogenlänge s, die vermöge der *Frenet*schen Formeln wiederum durch die Einheitsvektoren selbst ausdrückbar sind:

$$\frac{d\mathfrak{e}_\xi}{ds} = K\, \mathfrak{e}_\eta\,, \qquad \frac{d\mathfrak{e}_\eta}{ds} = -K\, \mathfrak{e}_\xi + \varkappa\, \mathfrak{e}_\zeta\,, \qquad \frac{d\mathfrak{e}_\zeta}{ds} = -\varkappa\, \mathfrak{e}_\eta\,. \tag{4, a, b, c}$$

Hierbei bedeuten $K = 1/R$ die Krümmung und $\varkappa = d\varphi_\xi/ds$ den Verdrehungswinkel je Längeneinheit (Windung), um den sich das durch $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{b}$ gebildete Dreibein beim Fortschreiten auf der Raumkurve um diese dreht.

[1] Der Punkt deutet eine Ableitung nach dem Parameter t an, und s ist die Bogenlänge der Raumkurve.

Als einschränkende Voraussetzungen gelten für die nachfolgende Rechnung drei Annahmen:

1. Die Systemlinie sei die Schwerlinie und gleichzeitig die Verbindungslinie der Schubmittelpunkte.

2. Die Belastungen sollen unmittelbar in der Systemlinie angreifen.

3. Die Richtungen der Hauptträgheitsachsen sollen in jedem Punkte der Systemlinie mit den dort vorliegenden durch $\mathfrak{e}_\eta$ bzw. $\mathfrak{e}_\zeta$ definierten natürlichen Richtungen der Raumkurve identisch sein, was immer dann erfüllt ist, wenn eine der Hauptträgheitsachsen durch den, dem entsprechenden Punkte der Systemlinie zugehörigen Krümmungsmittelpunkt verläuft.

2. Berechnung der Schnittlasten nach der Theorie erster Ordnung. Schnittlasten sind Übertragungslasten zwischen den einzelnen Teilen einer Konstruktion. Sie werden aus den Gleichgewichtsbedingungen für ein abgeschnitten gedachtes Teilstück eines Systems berechnet. Entsprechend der beiden Gleichungen (1a, b) unterscheidet man (Abb. 1)

1. Schnittkräfte $\mathfrak{Q}(s)$ bzw. $\mathfrak{Q}(t)$ und
2. Schnittmomente $\mathfrak{M}(s)$ bzw. $\mathfrak{M}(t)$.

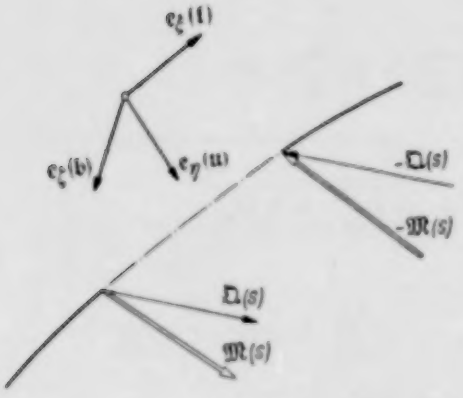

Abb. 1.

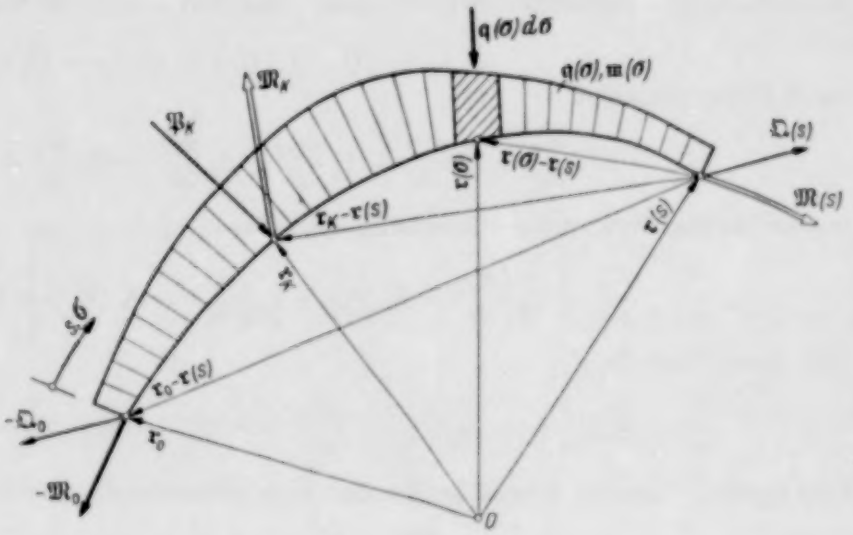

Abb. 2.

Sie treten an zwei sich gegenüberliegenden Schnittufern nach dem Reaktionsprinzip stets paarweise und mit jeweils umgekehrtem Richtungssinn auf. Indem man diese Schnittlastvektoren skalar mit den Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_\xi$, $\mathfrak{e}_\eta$ und $\mathfrak{e}_\zeta$ multipliziert, ergeben sich die Längs- und Querkräfte bzw. Torsions- und Biegemomente.

Das Kräfte- und Momenten-Gleichgewicht des in Abb. 2 dargestellten Systemteils, der durch Kräfte und Momente singulär ($\mathfrak{P}_K$, $\mathfrak{M}_K$) bzw. kontinuierlich ($\mathfrak{q}(s)$, $\mathfrak{m}(s)$) belastet ist, fordert

$$-\mathfrak{Q}_0+\sum_{K=1}^{s}\mathfrak{P}_K+\int_{\sigma=0}^{s}\mathfrak{q}(\sigma)\,d\sigma+\mathfrak{Q}(s)=0\,,$$

also

$$\mathfrak{Q}(s)=\mathfrak{Q}_0-\sum_{K=1}^{s}\mathfrak{P}_K-\int_{\sigma=0}^{s}\mathfrak{q}(\sigma)\,d\sigma\,, \tag{5}$$

sowie

$$-\mathfrak{M}_0-(\mathfrak{r}_0-\mathfrak{r}(s))\times\mathfrak{Q}_0+\sum_{K=1}^{s}\mathfrak{M}_K+\int_{\sigma=0}^{s}\mathfrak{m}(\sigma)\,d\sigma+\sum_{K=1}^{s}(\mathfrak{r}_K-\mathfrak{r}(s))\times\mathfrak{P}_K$$
$$+\int_{\sigma=0}^{s}(\mathfrak{r}(\sigma)-\mathfrak{r}(s))\times\mathfrak{q}(\sigma)\,d\sigma+\mathfrak{M}(s)=0\,,$$

bzw.

$$\mathfrak{M}(s)=\mathfrak{M}_0+(\mathfrak{r}_0-\mathfrak{r}(s))\times\mathfrak{Q}_0-\sum_{K=1}^{s}\mathfrak{M}_K-\int_{\sigma=0}^{s}\mathfrak{m}(\sigma)\,d\sigma-\sum_{K=1}^{s}(\mathfrak{r}_K-\mathfrak{r}(s))\times\mathfrak{P}_K$$
$$-\int_{\sigma=0}^{s}(\mathfrak{r}(\sigma)-\mathfrak{r}(s))\times\mathfrak{q}(\sigma)\,d\sigma\,. \tag{6}$$

Die Gleichungen (5) und (6) ermöglichen die Schnittlastermittlung, sofern die Anfangswerte $\mathfrak{Q}_0$ und $\mathfrak{M}_0$ vorgegeben sind. Bei Systemen mit freien Enden wird man daher den anfänglichen Ortsvektor $\mathfrak{r}_0$ dem freien Endpunkt zuordnen, da in diesem Falle $\mathfrak{Q}_0 = \mathfrak{M}_0 = 0$ gesetzt werden können. Ansonsten sind $\mathfrak{Q}_0$ und $\mathfrak{M}_0$ meist mit Auflagerlasten identisch, die aus einer Vorberechnung mittels der Gleichgewichtsbedingungen für das Gesamtsystem hervorgehen, sofern dieses statisch bestimmt gestützt ist. Im Falle statisch unbestimmter Stützung müssen zu den Gleichgewichtsbedingungen noch gewisse geometrische Bedingungen der Kontinuität hinzugenommen werden, wovon am Ende der Ausführungen noch gesprochen wird.

Durch Differentiation von (5) und (6) erhält man

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{ds} = -\mathfrak{q}(s)\,, \qquad \frac{d\mathfrak{M}}{ds} = -\frac{d\mathfrak{r}}{ds} \times \mathfrak{Q}(s) - \mathfrak{m}(s) = -\mathfrak{e}_\xi \times \mathfrak{Q}(s) - \mathfrak{m}(s) \tag{7a, b}$$

oder, wenn man diese Differentialbeziehungen hinsichtlich des Parameters t entwickelt,

$$\dot{\mathfrak{Q}}(t) = -|\dot{\mathfrak{r}}|\,\mathfrak{q}(t)\,, \qquad \dot{\mathfrak{M}}(t) = -|\dot{\mathfrak{r}}|\,[\mathfrak{e}_\xi \times \mathfrak{Q}(t) + \mathfrak{m}(t)]\,. \tag{8a, b}$$

Bei einer Komponentendarstellung von (7a, b) ist zu beachten, daß bei der Differentiation der Schnittlastvektoren, sofern ihre Komponentendarstellung auf die Basisvektoren $\mathfrak{e}_\xi$, $\mathfrak{e}_\eta$ und $\mathfrak{e}_\zeta$ Bezug nimmt, diese mitzudifferentieren sind. Man hat also z. B. wegen

$$\mathfrak{Q} = \{Q_\xi; Q_\eta; Q_\zeta\} = Q_\xi\,\mathfrak{e}_\xi + Q_\eta\,\mathfrak{e}_\eta + Q_\zeta\,\mathfrak{e}_\zeta$$

nach Differentiation

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{ds} = \mathfrak{e}_\xi\frac{dQ_\xi}{ds} + \mathfrak{e}_\eta\frac{dQ_\eta}{ds} + \mathfrak{e}_\zeta\frac{dQ_\zeta}{ds} + Q_\xi\frac{d\mathfrak{e}_\xi}{ds} + Q_\eta\frac{d\mathfrak{e}_\eta}{ds} + Q_\zeta\frac{d\mathfrak{e}_\zeta}{ds}\,,$$

woraus schließlich unter Beachtung von (4a, b, c)

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{ds} = \mathfrak{e}_\xi\left[\frac{dQ_\xi}{ds} - K\,Q_\eta\right] + \mathfrak{e}_\eta\left[\frac{dQ_\eta}{ds} + K\,Q_\xi - \varkappa\,Q_\eta\right] + \mathfrak{e}_\zeta\left[\frac{dQ_\zeta}{ds} + \varkappa\,Q_\eta\right]$$

und damit aus (7a)

$$\frac{dQ_\xi}{ds} - K\,Q_\eta = -q_\xi\,, \qquad \frac{dQ_\eta}{ds} + K\,Q_\xi - \varkappa\,Q_\zeta = -q_\eta; \qquad \frac{dQ_\zeta}{ds} + \varkappa\,Q_\eta = -q_\zeta$$

hervorgeht. Analog hierzu lautet die Komponentendarstellung von (7b)

$$\frac{dM_\xi}{ds} - K\,M_\eta = -m_\xi\,, \qquad \frac{dM_\eta}{ds} + K\,M_\xi - \varkappa\,M_\eta = -m_\eta + Q_\zeta\,, \qquad \frac{dM_\zeta}{ds} + \varkappa\,M_\eta = -m_\zeta - Q_\eta\,.$$

3. Berechnung des Deformationszustandes. Wie bereits betont, begnügt man sich bei den Verformungen näherungsweise mit der Darstellung des Verschiebungs- und Verdrehungszustandes der Systemlinie. Man geht hierbei, ebenso wie im allgemeinen in der Elastizitätstheorie, von den Verformungen der Elemente, im vorliegenden Falle also der Stabelemente aus. Für diese werden folgende Annahmen gemacht:

1. Die Elementendeformationen infolge der Schnittmomenten-Belastungen äußern sich in reinen gegenseitigen Querschnittsverdrehungen ohne Längenänderungen der Systemlinie, und die ebenbleibenden Querschnitte[1] stehen nach der Deformation weiterhin senkrecht zur verformten Systemlinie (Abb. 3).

2. Die Elementendeformationen infolge der Schnittkraft-Belastungen äußern sich in gegenseitigen Parallelverschiebungen benachbarter ebenbleibender[1] Querschnittsflächen (Abb. 4).

In der Festigkeitslehre werden die je Längeneinheit auftretenden gegenseitigen reinen Querschnittsverdrehungen $\bar{\psi}^{(M)}$ aus der Momentenbelastung und die Parallelverschiebungen $\bar{\varepsilon}^{(Q)}$ aus der Schnittkraftbelastung durch die Relationen

$$\bar{\psi}^{(M)} = \{\psi_\xi^{(M)}; \psi_\eta^{(M)}; \psi_\zeta^{(M)}\} = \{M_\xi; M_\eta; M_\zeta\}\begin{pmatrix} \frac{1}{G\,J_t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{E\,J_\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E\,J_\zeta} \end{pmatrix} = \mathfrak{M}\,\vartheta_M \tag{9}$$

[1] Vom Einfluß jeglicher Querschnittsverwölbungen bei der Torsion und bei den Querkraftbelastungen wird hier also abgesehen.

und

$$\bar{\varepsilon}^{(Q)} = \{\varepsilon_\xi^{(Q)};\ \gamma_\eta^{(Q)};\ \gamma_\zeta^{(Q)}\} = \{Q_\xi;\ Q_\eta;\ Q_\zeta\} \begin{pmatrix} \frac{1}{E\,F} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varkappa_\eta G\,F} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varkappa_\zeta G\,F} \end{pmatrix} = \mathfrak{Q}\,\vartheta_Q \qquad (10)$$

mit den Schnittlasten in Beziehung gesetzt. Hierbei bedeuten J_η bzw. J_ζ die Trägheitsmomente hinsichtlich der Achsen η bzw. ζ, J_t das Torsionsflächenmoment, das im wesentlichen durch das Volumenintegral des Hügels der Torsionsfunktion definiert ist und $\varkappa_\eta$ bzw. $\varkappa_\zeta$ zwei die Schubspannungsverteilung in der Querschnittsfläche F berücksichtigende Faktoren.

Aus diesen Schnittlast-Verformungsrelationen sind nunmehr die Differentialgleichungen für die Deformationsgrößen des Systems zu entwickeln. Der Verformungszustand ist eindeutig beschrieben, wenn man die Verschiebungen $\mathfrak{w}$ bzw. die Verdrehungen $\bar{\varphi}$ der Punkte der Systemlinie, sowie die Verdrehungen $\bar{\beta}$ der Flächenquerschnitte berechnet hat. Wir suchen daher nachfolgend, die genannten Größen mit den jeweils dreikomponentigen Dehnungsvektoren $\bar{\psi}^{(M)}$ und $\bar{\varepsilon}^{(Q)}$ in Verbindung zu bringen.

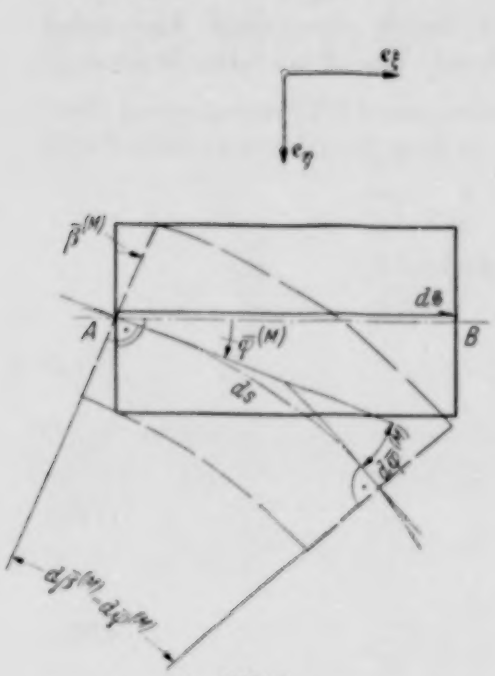

Abb. 3.

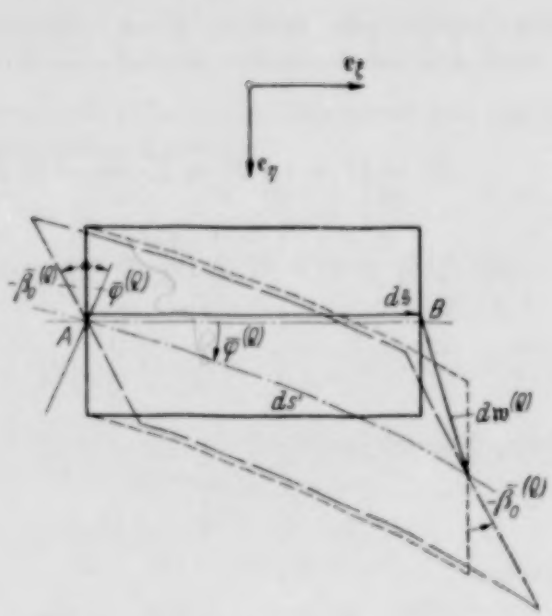

Abb. 4.

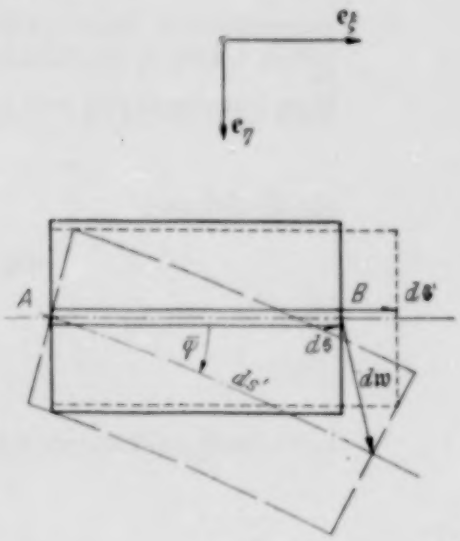

Abb. 5.

Vereinfachend wird zu diesem Zwecke der gesamte Deformationszustand in einen Schnittmomenten-Deformationszustand ($\mathfrak{w}^{(M)}$, $\bar{\varphi}^{(M)}$) und in einen Schnittkraft-Deformationszustand ($\mathfrak{w}^{(Q)}$, $\bar{\varphi}^{(Q)}$, $\bar{\beta}^{(Q)}$) zerlegt. Die jeweils resultierenden Relationen lassen sich superponieren, womit dann die endgültigen Deformationsgleichungen gefunden sind.

a) Die Schnittmomenten-Deformationen. Da die Flächenquerschnitte hierbei nach der Deformation weiterhin senkrecht auf der deformierten Systemlinie stehen sollen (Abb. 3), sind die Querschnittsverdrehungen $\bar{\beta}^{(M)}$ mit den Verdrehungen $\bar{\varphi}^{(M)}$ der Systemlinienpunkte identisch. Man hat demnach für die Verdrehungsänderungen der Systemlinienpunkte die Relation

$$\frac{d\bar{\varphi}^{(M)}}{ds} = \frac{d\beta^{(M)}}{ds} = \bar{\psi}^{(M)} = \mathfrak{M}\,\vartheta_M\,. \qquad (11)$$

b) Die Schnittkraft-Deformationen. Im Gegensatz zu a) sind hier die Komponenten des Dehnungsvektors $\bar{\varepsilon}^{(Q)}$ nicht allein durch die Verformungsgrößen der Systemlinie ($\mathfrak{w}^{(Q)}$, $\bar{\varphi}^{(Q)}$) angebbar, da eine Schubverzerrung der Elemente sowohl eine Neigung $\varphi^{(Q)} = \{\varphi_\xi^{(Q)}; \varphi_\eta^{(Q)}; \varphi_\zeta^{(Q)}\}$ $= \{\beta_{0\xi}^{(Q)}; \varphi_\eta^{(Q)}; \varphi_\zeta^{(Q)}\}$ der Systemlinie als auch eine (wegen der Parallelität der Querschnitte bedingte konstante) Verdrehung $\bar{\beta}_0^{(Q)}$ der Querschnitte aus ihrer unverdrehten Lage heraus zur Folge haben kann. Gemäß Abb. 4 hat man also

$$\varepsilon_\xi^{(Q)} = \frac{d\mathfrak{w}^{(Q)}}{ds}\,e_\xi; \qquad \gamma_\eta^{(Q)} = \varphi_\zeta^{(Q)} - \beta_{0\zeta}^{(Q)}; \qquad \gamma_\zeta^{(Q)} = -\,(\varphi_\eta^{(Q)} - \beta_{0\eta}^{(Q)})\,,$$

oder auch

$$(\bar{\varphi}^{(Q)} - \bar{\beta}_0^{(Q)}) \times \mathfrak{e}_\xi + \left(\frac{d\mathfrak{w}^{(Q)}}{ds}\,\mathfrak{e}_\xi\right)\mathfrak{e}_\xi = \bar{\varepsilon}^{(Q)} = \mathfrak{Q}\,\vartheta_Q \tag{12}$$

und nach vektorischer Multiplikation mit $\mathfrak{e}_\xi$

$$\bar{\varphi}^{(Q)} - \bar{\beta}_0^{(Q)} - (\varphi_\xi^{(Q)} - \beta_{0\xi}^{(Q)})\,\mathfrak{e}_\xi = \bar{\varphi}^{(Q)} - \bar{\beta}_0^{(Q)} = \mathfrak{e}_\xi \times (\mathfrak{Q}\,\vartheta_Q)\,. \tag{12a}$$

Durch Differentiation von (12a) gewinnt man

$$\frac{d\bar{\varphi}^{(Q)}}{ds} = \frac{d}{ds}\,[\mathfrak{e}_\xi \times (\mathfrak{Q}\,\vartheta_Q)]\,, \tag{12b}$$

so daß nach Zusammenfassung von (11) und (12b)

$$\frac{d\bar{\varphi}^{(M)}}{ds} + \frac{d\bar{\varphi}^{(Q)}}{ds} = \frac{d\bar{\varphi}}{ds} = \mathfrak{M}\,\vartheta_M + \frac{d}{ds}\,[\mathfrak{e}_\xi \times (\mathfrak{Q}\,\vartheta_Q)] \tag{13}$$

entsteht. Um hieraus auf die Differentialgleichungen für die Verschiebungen zu kommen, betrachten wir noch einmal ein Element (Abb. 5), dessen relative Verschiebung $d\mathfrak{w} = \frac{d\mathfrak{w}}{ds}\,ds$ des Punktes B gegenüber A man sich hervorgegangen denken kann einerseits durch eine reine Streckung $\varepsilon_\xi^{(Q)}\,ds = d\mathfrak{w}\,\mathfrak{e}_\xi$ des Elementes und andererseits durch eine Drehung um A um den Winkel $\bar{\varphi}$. Man hat demnach mit

$$d\bar{s}' = (1 + \varepsilon_\xi)\,d\bar{s} \approx 1 \cdot d\bar{s} = ds\,\mathfrak{e}_\xi$$

die Beziehung

$$d\mathfrak{w} = (d\mathfrak{w}\,\mathfrak{e}_\xi)\,\mathfrak{e}_\xi + \bar{\varphi} \times d\bar{s} = \left(\frac{d\mathfrak{w}}{ds}\,ds\,\mathfrak{e}_\xi\right)\mathfrak{e}_\xi + ds\,\bar{\varphi} \times \mathfrak{e}_\xi\,,$$

also

$$\frac{d\mathfrak{w}}{ds} = \left(\frac{d\mathfrak{w}}{ds}\,\mathfrak{e}_\xi\right)\mathfrak{e}_\xi + \bar{\varphi} \times \mathfrak{e}_\xi = \left(\frac{Q_\xi}{E\,F}\right)\mathfrak{e}_\xi + \bar{\varphi} \times \mathfrak{e}_\xi \tag{14a}$$

bzw. nach vektorischer Multiplikation mit $\mathfrak{e}_\xi$

$$\mathfrak{e}_\xi \times \frac{d\mathfrak{w}}{ds} = \bar{\varphi} - \varphi_\xi\,\mathfrak{e}_\xi \tag{14b}$$

und damit nach Differentiation

$$\frac{d\bar{\varphi}}{ds} = \frac{d}{ds}\,(\varphi_\xi\,\mathfrak{e}_\xi) + \frac{d}{ds}\left(\mathfrak{e}_\xi \times \frac{d\mathfrak{w}}{ds}\right). \tag{14c}$$

Einsetzen von (14c) in (13) liefert damit schließlich

$$\frac{d}{ds}\,(\varphi_\xi\,\mathfrak{e}_\xi) + \frac{d}{ds}\left(\mathfrak{e}_\xi \times \frac{d\mathfrak{w}}{ds}\right) = \mathfrak{M}\,\vartheta_M + \frac{d}{ds}\,[\mathfrak{e}_\xi \times (\mathfrak{Q}\,\vartheta_Q)]\,, \tag{15}$$

also in Komponentenschreibweise unter Beachtung von (4a, b, c)

$$\frac{d\varphi_\xi}{ds} + K\left(\frac{dw_\zeta}{ds} + \varkappa\,w_\eta\right) = \frac{M_\xi}{G\,J_t} + K\,\frac{Q_\zeta}{\alpha_\zeta\,G\,F}\,, \tag{15a}$$

$$K\,\varphi_\xi - \frac{d}{ds}\left(\frac{dw_\zeta}{ds} + \varkappa\,w_\eta\right) - \varkappa\left(\frac{dw_\eta}{ds} + K\,w_\xi - \varkappa\,w_\zeta\right) = \frac{M_\eta}{E\,J_\eta} - \varkappa\,\frac{Q_\eta}{\alpha_\eta\,G\,F} - \frac{d}{ds}\left(\frac{Q_\zeta}{\alpha_\zeta\,G\,F}\right), \tag{15b}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dw_\eta}{ds} + K\,w_\xi - \varkappa\,w_\zeta\right) - \varkappa\left(\frac{dw_\zeta}{ds} + \varkappa\,w_\eta\right) = \frac{M_\zeta}{E\,J_\zeta} - \varkappa\,\frac{Q_\zeta}{\alpha_\zeta G\,F} + \frac{d}{ds}\left(\frac{Q_\eta}{\alpha_\eta\,G\,F}\right). \tag{15c}$$

Zu diesen drei Gleichungen tritt nun noch die bisher nicht ausgenutzte ξ-Komponente der Gleichung (14a)

$$\frac{d\mathfrak{w}}{ds}\,\mathfrak{e}_\xi = \frac{dw_\xi}{ds} - K\,w_\eta = \frac{Q_\xi}{E\,F} \tag{15d}$$

hinzu, so daß mit (15a—d) vier Differentialgleichungen für die Verschiebungen $\mathfrak{w} = \{w_\xi;\, w_\eta;\, w_\zeta\}$ und den Drillwinkel φ_ξ zur Verfügung stehen. Nach Lösung ergibt sich für die beiden anderen

Drehwinkelkomponenten gemäß Gleichung (14b) mit (15a) und (15b)

$$\left.\begin{aligned}\varphi_\eta &= -\left(\frac{dw_\zeta}{ds}+\varkappa w_\eta\right)=\frac{1}{K}\left(\frac{d\varphi_\xi}{ds}-\frac{M_\xi}{G J_t}\right)-\frac{Q_\zeta}{\alpha_\zeta G F},\\ \varphi_\zeta &= \frac{dw_\eta}{ds}+K w_\xi-\varkappa w_\zeta=\frac{1}{\varkappa}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{K}\frac{d\varphi_\xi}{ds}\right)+\frac{K}{\varkappa}\varphi_\xi-\frac{1}{\varkappa}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{K}\frac{M_\xi}{G J_t}\right)-\frac{1}{\varkappa}\frac{M_\eta}{E J_\eta}+\frac{Q_\eta}{\alpha_\eta G F},\end{aligned}\right\}\quad(16a\text{—}b)$$

während die resultierenden Querschnittsverdrehungen $\bar{\beta}$ sich unter Beachtung von (12a) zu

$$\bar{\beta}=\bar{\beta}^{(M)}+\bar{\beta}_0^{(Q)}=\bar{\varphi}^{(M)}+\bar{\beta}_0^{(Q)}=\bar{\varphi}^{(M)}+\bar{\varphi}^{(Q)}-\mathfrak{e}_\xi\times(\mathfrak{Q}\,\vartheta_Q)=\bar{\varphi}-\mathfrak{e}_\xi\times(\mathfrak{Q}\,\vartheta_Q),\qquad(17)$$

also in Komponentenschreibweise zu

$$\beta_\xi=\varphi_\xi,\qquad \beta_\eta=\varphi_\eta+\frac{Q_\zeta}{\alpha_\zeta G F},\qquad \beta_\zeta=\varphi_\zeta-\frac{Q_\eta}{\alpha_\eta G F}\qquad(18a\text{—}c)$$

ergeben.

Durch fortlaufende Elimination läßt sich das Gleichungssystem (15a—d) auf zwei Differentialgleichungen dritter Ordnung für φ_ξ bzw. w_ξ reduzieren. Zunächst erhält man aus (15c) nach Elimination der Verschiebungskomponenten mit Hilfe von (15a) und (15b) eine Differentialgleichung dritter Ordnung für den Drillwinkel φ_ξ:

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\varkappa}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{K}\frac{d\varphi_\xi}{ds}\right)\right]+\frac{d}{ds}\left(\frac{K}{\varkappa}\varphi_\xi\right)+\frac{\varkappa}{K}\frac{d\varphi_\xi}{ds}=\frac{\varkappa}{K}\frac{M_\xi}{G J_t}+\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\varkappa}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{K}\frac{M_\xi}{G J_t}\right)\right]+\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\frac{M_\eta}{E J_\eta}\right)+\frac{M_\zeta}{E J_\zeta}.\qquad(19)$$

Nach Lösung von (19) kann nunmehr aus (15a) und (15b) unter Heranziehung von (15d) folgendes Gleichungssystem für w_ξ und w_ζ gewonnen werden:

$$\frac{dw_\zeta}{ds}+\frac{\varkappa}{K}\frac{dw_\xi}{ds}=\frac{1}{K}\frac{M_\xi}{G J_t}+\frac{\varkappa}{K}\frac{Q_\xi}{E F}+\frac{Q_\zeta}{\alpha_\zeta G F}-\frac{1}{K}\frac{d\varphi_\xi}{ds},\qquad(20a)$$

$$\begin{aligned}w_\zeta=\frac{K}{\varkappa}w_\xi+\frac{1}{\varkappa}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{K}\frac{dw_\xi}{ds}\right)-\frac{1}{\varkappa}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{K}\frac{Q_\xi}{E F}\right)-\frac{1}{\varkappa}\Bigg[&\frac{1}{\varkappa}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{K}\frac{d\varphi_\xi}{ds}\right)\\&+\frac{K}{\varkappa}\varphi_\xi-\frac{1}{\varkappa}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{K}\frac{M_\xi}{G J_t}\right)-\frac{1}{\varkappa}\frac{M_\eta}{E J_\eta}+\frac{Q_\eta}{\alpha_\eta G F}\Bigg].\end{aligned}\qquad(20b)$$

Damit folgt schließlich durch Elimination von w_ζ gemäß (20b) aus (20a) unter Berücksichtigung von (19) eine Differentialgleichung dritter Ordnung für w_ξ:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\varkappa}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{K}\frac{dw_\xi}{ds}\right)\right]+\frac{d}{ds}\left(\frac{K}{\varkappa}w_\xi\right)+\frac{\varkappa}{K}\frac{dw_\xi}{ds}&=\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\varkappa}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{K}\frac{Q_\xi}{E F}\right)\right]\\&+\frac{1}{K}\left[2\left(\frac{M_\xi}{G J_t}-\frac{d\varphi_\xi}{ds}\right)+\frac{K}{\varkappa}\frac{M_\zeta}{E J_\zeta}+\frac{K}{\varkappa}\frac{d}{ds}\left(\frac{Q_\eta}{\alpha_\eta G F}\right)+\varkappa\frac{Q_\xi}{E F}+K\frac{Q_\zeta}{\alpha_\zeta G F}\right]\\&+\left[\frac{1}{\varkappa}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{K}\frac{d\varphi_\xi}{ds}\right)+\frac{K}{\varkappa}\varphi_\xi-\frac{1}{\varkappa}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{K}\frac{M_\xi}{G J_t}\right)-\frac{1}{\varkappa}\frac{M_\eta}{E J_\eta}+\frac{Q_\eta}{\alpha_\eta G F}\right]\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right).\end{aligned}\qquad(21)$$

Nach Lösung des Gleichungssystems (15a—d) stehen also insgesamt 6 Integrationskonstanten zur Befriedigung des Randwertproblems zur Verfügung. Lassen sich mit diesen Konstanten die aus der Stablagerung hervorgehenden geometrischen Bedingungen nicht erfüllen, so liegt statisch unbestimmte Stützung vor. In diesen Fällen bleiben bei der Schnittlastenermittlung nach (5) bzw. (6) und damit auch in den Lösungen von (15a—d) so viele Fessellastkomponenten (statisch unbestimmte Größen) zunächst willkürlich, wie notwendig sind, um zusammen mit den 6 Integrationskonstanten das Randwertproblem zu erfüllen.

Vor der Untersuchung eines Beispieles seien noch die Gleichungen für Stäbe mit ebener Anfangskrümmung angegeben. Mit $\varkappa=0$ gehen aus (15a—d) die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\varphi_\xi}{ds}+K\frac{dw_\zeta}{ds}&=\frac{M_\xi}{G J_t}+K\frac{Q_\zeta}{\alpha_\zeta G F},\\ K\varphi_\xi-\frac{d^2w_\zeta}{ds^2}&=\frac{M_\eta}{E J_\eta}-\frac{d}{ds}\left(\frac{Q_\zeta}{\alpha_\zeta G F}\right),\\ \frac{d}{ds}\left(\frac{dw_\eta}{ds}+K w_\xi\right)&=\frac{M_\zeta}{E J_\zeta}+\frac{d}{ds}\left(\frac{Q_\eta}{\alpha_\eta G F}\right),\\ \frac{dw_\xi}{ds}-Kw_\eta&=\frac{Q_\xi}{E F}\end{aligned}\right\}\qquad(22a\text{—}d)$$

sowie aus (16a, b) die Beziehungen

$$\varphi_\eta = -\frac{dw_\zeta}{ds}, \qquad \varphi_\zeta = \frac{dw_\eta}{ds} + K\, w_\xi \tag{23a—b}$$

hervor. Auch hier ist eine Reduktion des Systems (22a—d) auf zwei Differentialgleichungen dritter Ordnung möglich. Setzt man die aus (22d) hervorgehende Relation

$$w_\eta = \frac{1}{K}\left(\frac{dw_\xi}{ds} - \frac{Q_\xi}{E\,F}\right) \tag{24a}$$

in (22c) ein, so folgt eine Differentialgleichung dritter Ordnung für w_ξ:

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{K}\frac{dw_\xi}{ds}\right) + \frac{d}{ds}(K\,w_\xi) = \frac{M_\zeta}{E\,J_\zeta} + \frac{d}{ds}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{K}\frac{Q_\xi}{E\,F}\right) + \frac{Q_\eta}{\alpha_\eta\,G\,F}\right], \tag{24b}$$

während man nach Elimination des Drillwinkels φ_ξ gemäß (22b)

$$\varphi_\xi = \frac{1}{K}\frac{d^2 w_\zeta}{ds} + \frac{1}{K}\frac{M_\eta}{E\,J_\eta} - \frac{1}{K}\frac{d}{ds}\left(\frac{Q_\zeta}{\alpha_\zeta\,G\,F}\right) \tag{24c}$$

aus (22a) die Gleichung

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{K}\frac{d^2 w_\zeta}{ds}\right] + K\frac{dw_\zeta}{ds} = \frac{M_\xi}{G\,J_t} - \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{K}\frac{M_\eta}{E\,J_\eta}\right) + K\frac{Q_\zeta}{\alpha_\zeta\,G\,F} + \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{K}\frac{d}{ds}\left(\frac{Q_\zeta}{\alpha_\zeta\,G\,F}\right)\right] \tag{24d}$$

erhält.

4. Beispiel. Eine zylindrische Schraubenfeder mit n Windungen, dem Windungshalbmesser r und dem Drahthalbmesser a besitze an ihren Enden je einen starren, bis in die Zylinderachse reichenden horizontalen Arm $\overline{OA}$ bzw. $\overline{O'A'}$ (Abb. 6). Es soll der Deformationszustand der Feder infolge zweier, an den Armen angreifender Kräfte P bestimmt werden unter der Voraussetzung, daß der Kraftangriffspunkt 0 als unverschieblich angesehen wird.

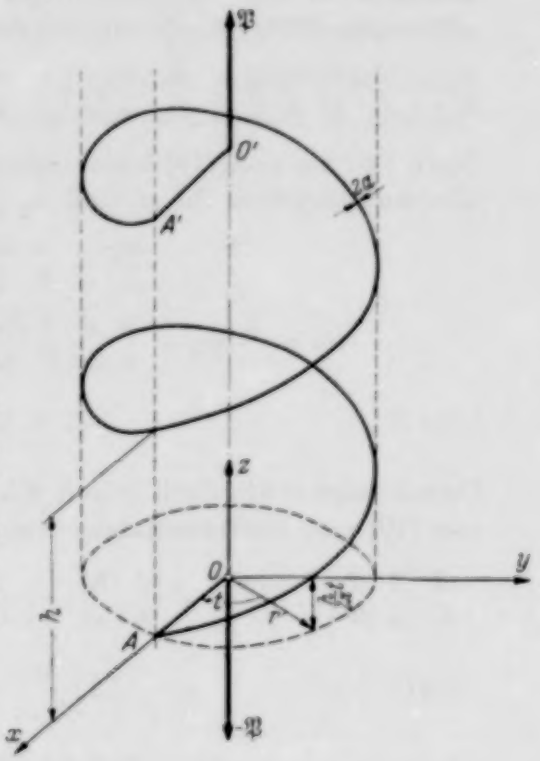

Abb. 6.

Die Gleichung einer Schraubenlinie vom Zylinderhalbmesser r und der Ganghöhe h lautet für das in Abb. 6 eingetragene Koordinatensystem mit

$$s(t) = \int\sqrt{(r\,t)^2 + \left(\frac{h}{2\pi}t\right)^2} = r\,t\int\sqrt{1 + \left(\frac{h}{2\pi r}\right)^2} = r\,t\sqrt{1+\alpha^2},$$

$$\alpha = \frac{h}{2\pi r},$$

also $t = t(s) = \dfrac{s}{r\sqrt{1+\alpha^2}}$ folgendermaßen:

$$\mathfrak{r} = r\,\{\cos t;\ \sin t;\ \alpha\,t\}$$

$$= r\left\{\cos\frac{s}{r\sqrt{1+\alpha^2}};\quad \sin\frac{s}{r\sqrt{1+\alpha^2}};\quad \alpha\frac{s}{r\sqrt{1+\alpha^2}}\right\}.$$

Die Basisvektoren folgen nach (3a, b, c) zu

$$\mathfrak{e}_\xi = \frac{d\mathfrak{r}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\{-\sin t;\ \cos t;\ \alpha\},$$

$$\mathfrak{e}_\eta = \frac{d\mathfrak{e}_\xi/ds}{|d\mathfrak{e}_\xi/ds|} = -\{\cos t;\ \sin t;\ 0\},$$

$$\mathfrak{e}_\zeta = \mathfrak{e}_\xi \times \mathfrak{e}_\eta = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\{\alpha\sin t;\ -\alpha\cos t;\ 1\},$$

und für Krümmung und Windung erhält man aus (4a, c)

$$K = \frac{1}{R} = \frac{1}{r(1+\alpha^2)} = K_0 = \frac{1}{R_0}, \qquad \varkappa = \frac{\alpha}{r(1+\alpha^2)} = \varkappa_0 = \alpha\,K_0.$$

Die Schnittlasten ergeben sich nach (5) und (6) mit $\mathfrak{r}_0 = 0$, $\mathfrak{M}_0 = 0$, $\mathfrak{Q}_0 = \mathfrak{P} = P\{0; 0; 1\}$, $\mathfrak{q}(s) = \mathfrak{m}(s) = 0$, $\mathfrak{P}_K = 0$, $\mathfrak{M}_K = 0$ zu

$$\mathfrak{Q}(s) = \mathfrak{Q}_0 = \mathfrak{P} = P\{0; 0; 1\}$$

und

$$\mathfrak{M}(s) = -\mathfrak{r}(s) \times \mathfrak{Q}_0 = -\mathfrak{r}(s) \times \mathfrak{P} = P r\{-\sin t;\ \cos t; 0\},$$

so daß man für die Komponenten

$$\left.\begin{aligned} Q_\xi &= \mathfrak{Q}\,\mathfrak{e}_\xi = P\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}; \quad Q_\eta = \mathfrak{Q}\,\mathfrak{e}_\eta = 0; \quad Q_\zeta = \mathfrak{Q}\,\mathfrak{e}_\zeta = P\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}; \\ M_\xi &= \mathfrak{M}\,\mathfrak{e}_\xi = Pr\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}; \quad M_\eta = \mathfrak{M}\,\mathfrak{e}_\eta = 0; \quad M_\zeta = \mathfrak{M}\,\mathfrak{e}_\zeta = -Pr\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}; \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

erhält. Damit ergeben sich aus (19) bzw. (21) mit $\frac{d}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt} = \frac{1}{r\sqrt{1+\alpha^2}}\frac{d}{dt}$ sowie mit $J_t = \frac{\pi a^4}{2}$, $J_\eta = J_\zeta = \frac{\pi a^4}{4}$, $F = \pi a^2$, $\alpha_\eta = \alpha_\zeta = \frac{3}{4}$, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ die Gleichungen

$$\frac{d^3\varphi_\xi}{dt^3} + \frac{d\varphi_\xi}{dt} = \frac{4Pr^2\nu}{E\pi a^4}\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} \tag{26}$$

bzw. wenn man noch zur Abkürzung $\frac{Q_\xi}{EF} = \frac{P}{E\pi a^2}\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \varepsilon_0$ setzt,

$$\frac{d^3w_\xi}{dt^3} + \frac{dw_\xi}{dt} = \alpha r\left[\frac{4Pr^2}{E\pi a^4}\left(1 + 2\nu + \frac{2}{3}\frac{1+\nu}{1+\alpha^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\frac{d\varphi_\xi}{dt} + \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\varepsilon_0\right)\right]. \tag{27}$$

Zunächst ist Gleichung (26) zu betrachten. Ihre allgemeine Lösung lautet

$$\varphi_\xi = C_1 + \nu\frac{4Pr^2}{E\pi a^4}\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}t + C_2\cos t + C_3\sin t, \tag{28}$$

so daß (27) in

$$\frac{d^3w_\xi}{dt^3} + \frac{dw_\xi}{dt} = \frac{4Pr^2}{E\pi a^4}\alpha\left[1 + \frac{2\nu}{1+\alpha^2} + \frac{2}{3}\frac{1+\nu}{1+\alpha^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\right] + \frac{\alpha^2 r}{\sqrt{1+\alpha^2}}\varepsilon_0 + 2\alpha r\,(C_2\sin t - C_3\cos t)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$w_\xi = \frac{4Pr^2}{E\pi a^4}\alpha\left[1 + \frac{2\nu}{1+\alpha^2} + \frac{2}{3}\frac{1+\nu}{1+\alpha^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]t + \frac{\alpha^2 r\,\varepsilon_0}{\sqrt{1+\alpha^2}}t + \alpha r\,(C_3 t\cos t - C_2 t\sin t) + C_4 + C_5\cos t + C_6\sin t \tag{29}$$

übergeht. Die restlichen Verformungsgrößen ergeben sich dann nach (15d), (20b), (16a, b) und (18a—c) zu

$$w_\eta = \sqrt{1+\alpha^2}\left\{\frac{4Pr^2}{E\pi a^4}\alpha\left[1 + \frac{2\nu}{1+\alpha^2} + \frac{2}{3}\frac{1+\nu}{1+\alpha^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\right] - \frac{r\,\varepsilon_0}{\sqrt{1+\alpha^2}} - \alpha r\,(C_2 t\cos t + C_3 t\sin t) + (C_6 + \alpha r\,C_3)\cos t - (C_5 + \alpha r\,C_2)\sin t\right\}, \tag{30a}$$

$$w_\zeta = \frac{4Pr^2}{E\pi a^4}\left[1 + \nu\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} + \frac{2}{3}\frac{1+\nu}{1+\alpha^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]t + \frac{\alpha r\,\varepsilon_0}{\sqrt{1+\alpha^2}}t + \frac{C_4}{\alpha} - r\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2}C_1 + \alpha^2 r\,(C_2 t\sin t - C_3 t\cos t) - [\alpha C_5 + r(1+\alpha^2)C_2]\cos t - [\alpha C_6 + r(1+\alpha^2)C_3]\sin t, \tag{30b}$$

$$\varphi_\eta = -\sqrt{1+\alpha^2}\left[\frac{4Pr^2}{E\pi a^4}\left(1 + \frac{\nu}{1+\alpha^2} + \frac{2}{3}\frac{1+\nu}{1+\alpha^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\right) + C_2\sin t - C_3\cos t\right], \tag{30c}$$

$$\varphi_\zeta = \frac{C_1}{\alpha} + \nu\frac{4Pr^2}{E\pi a^4}\frac{\alpha}{1+\alpha^2}t - \alpha\,(C_2\cos t + C_3\sin t), \tag{30d}$$

$$\beta_\xi = \varphi_\xi = C_1 + \nu\frac{4Pr^2}{E\pi a^4}\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}t + C_2\cos t + C_3\sin t, \tag{30e}$$

$$\beta_\eta = \varphi_\eta + \frac{Q_\zeta}{\alpha_\zeta GF} = -\sqrt{1+\alpha^2}\left[\frac{4Pr^2}{E\pi a^4}\left(1 + \frac{\nu}{1+\alpha^2}\right) + C_2\sin t - C_3\cos t\right], \tag{30f}$$

$$\beta_\zeta = \varphi_\zeta - \frac{Q_\eta}{\alpha_\eta GF} = \frac{C_1}{\alpha} + \nu\frac{4Pr^2}{E\pi a^4}\frac{\alpha}{1+\alpha^2}t - \alpha\,(C_2\cos t + C_3\sin t). \tag{30g}$$

Die Konstanten C_k $(k = 1 \ldots 6)$ werden aus den Randbedingungen bestimmt. Sehen wir den Kraftangriffspunkt O als unverschieblich an, so ist für den Arm $\overline{OA}$ nur eine Drehung um O möglich. Der Verbund zwischen Arm und Schraubenfeder bedingt, daß der Drehwinkel des Armes mit dem Querschnittdrehwinkel $\bar{\beta}$ $(t = 0)$ des Schraubenfederpunktes A identisch sein muß. Man hat also für die Verschiebung des Federpunktes A

$$\mathfrak{w}_A = \mathfrak{w}\,(t=0) = \bar{\beta}\,(t=0) \times (\vec{OA}) = -\bar{\beta}\,(t=0) \times r\,\mathfrak{e}_\eta\,(t=0) \quad \text{bzw.} \quad [\mathfrak{w} + r\,\bar{\beta} \times \mathfrak{e}_\eta]_{t=0} = 0 \tag{31}$$

oder in Komponentendarstellung

$$w_\xi\,(t=0) - r\,\beta_\zeta\,(t=0) = 0; \quad w_\eta\,(t=0) = 0; \quad w_\zeta\,(t=0) + r\,\beta_\xi\,(t=0) = 0\,. \tag{31a—c}$$

Als weitere Randbedingungen betrachten wir die Aussage, daß die Verschiebung des oberen Kraftangriffspunktes O' nur eine lotrechte Komponente $\mathfrak{w}_{z_0'} = w_{z_0'}\,\mathfrak{e}_z$ besitzen soll. In diesem Falle folgt mit dem Querschnitts-Neigungswinkel $\bar{\beta}$ $(t = 2\pi n)$ (der mit dem Neigungswinkel des Armes $\overline{O'A'}$ identisch ist) für die Verschiebungen des oberen Schraubenfederpunktes A'

$$\mathfrak{w}_{A'} = \mathfrak{w}\,(t = 2\pi n) = \mathfrak{w}_{z_0'} - r\,\bar{\beta}\,(t = 2\pi n) \times \mathfrak{e}_\eta\,(t = 2\pi n) \quad \text{bzw.} \quad [\mathfrak{w} + r\,\bar{\beta} \times \mathfrak{e}_\eta]_{t=2\pi n} = \mathfrak{w}_{z_0'} \tag{32}$$

also in Komponentendarstellung

$$\left.\begin{aligned} w_\xi\,(t = 2\pi n) - r\,\beta_\zeta\,(t = 2\pi n) &= w_{z_0'}\,\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,, \qquad w_\eta\,(t = 2\pi n) = 0\,, \\ w_\zeta\,(t = 2\pi n) + r\,\beta_\xi\,(t = 2\pi n) &= w_{z_0}\,\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{32a—c}$$

Einsetzen von (29), (30a), (30b), (30e), (30f) und (30g) in (31a—c) bzw. (32a—c) liefert ein lineares Gleichungssystem für die C_k $(k = 1, \ldots 6)$ sowie für $w_{z_0'}$. Hieraus folgen schließlich

$$C_2 = 0\,, \quad C_3 = 0\,, \quad C_4 = \frac{r}{\alpha}\,C_1\,, \quad C_5 = 0\,,$$

$$C_6 = \frac{r\,\varepsilon_0}{\sqrt{1+\alpha^2}} - \frac{4\,P\,r^3}{E\pi a^4}\,\alpha\left[1 + \frac{2\,\nu}{1+\alpha^2} + \frac{2}{3}\,\frac{1+\nu}{1+\alpha^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\right],$$

$$\begin{aligned} w_{z_0'} &= 2\pi\,r\,n\,\alpha\,\varepsilon_0 + \frac{8\,P\,r^3\,n}{E\,a^4}\,\sqrt{1+\alpha^2}\left[1 + \frac{\nu}{1+\alpha^2} + \frac{2}{3}\,\frac{1+\nu}{1+\alpha^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\right] \\ &= \frac{8\,P\,r^3\,n}{E\,a^4}\,\sqrt{1+\alpha^2}\left[1 + \frac{\nu}{1+\alpha^2} + \frac{2}{3}\,\frac{1+\nu}{1+\alpha^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{1}{4}\,\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\right], \end{aligned} \tag{33}$$

wobei C_1 zunächst unbestimmt bleibt. Die Deformationsgrößen sind also endgültig

$$\varphi_\xi = \beta_\xi = C_1 + \nu\,\frac{4\,P\,r^2}{E\pi a^4}\,\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\,t\,, \tag{34a}$$

$$\varphi_\eta = -\frac{4\,P\,r^2}{E\pi a^4}\,\sqrt{1+\alpha^2}\left[1 + \frac{\nu}{1+\alpha^2} + \frac{2}{3}\,\frac{1+\nu}{1+\alpha^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\right], \tag{34b}$$

$$\varphi_\zeta = \frac{C_1}{\alpha} + \nu\,\frac{4\,P\,r^2}{E\pi a^4}\,\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\,t\,, \tag{34c}$$

$$\beta_\eta = -\frac{4\,P\,r^2}{E\pi a^4}\,\sqrt{1+\alpha^2}\left(1 + \frac{\nu}{1+\alpha^2}\right), \tag{34d}$$

$$\beta_\zeta = \frac{C_1}{\alpha} + \nu\,\frac{4\,P\,r^2}{E\pi a^4}\,\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\,t\,, \tag{34e}$$

$$w_\xi = r\,\frac{C_1}{\alpha} + \frac{4\,P\,r^3}{E\pi a^4}\,\alpha\left[1 + \frac{2\,\nu}{1+\alpha^2} + \frac{2}{3}\,\frac{1+\nu}{1+\alpha^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\right](t - \sin t) + \frac{P\,r}{E\pi a^2}\,\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\,(\alpha^2\,t + \sin t)\,, \tag{34f}$$

$$w_\eta = \frac{4\,P\,r^3}{E\pi a^4}\,\alpha\,\sqrt{1+\alpha^2}\left[1 + \frac{2\,\nu}{1+\alpha^2} + \frac{2}{3}\,\frac{1+\nu}{1+\alpha^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{1}{4}\,\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\right](1 - \cos t)\,, \tag{34g}$$

$$\begin{aligned} w_\zeta = -r\,C_1 + \frac{4\,P\,r^3}{E\pi a^4}\Bigg[&\left(1 + \nu\,\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} + \frac{2}{3}\,\frac{1+\nu}{1+\alpha^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\right)t \\ &+ \left(1 + \frac{2\,\nu}{1+\alpha^2} + \frac{2}{3}\,\frac{1+\nu}{1+\alpha^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\right)\alpha^2 \sin t + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\,\frac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^2(t - \sin t)\Bigg]. \end{aligned} \tag{34h}$$

Zur Deutung der in der Lösung verbliebenen Konstanten C_1 betrachten wir ein Element der Schraubenlinie (Abb. 7) mit den Verschiebungen $w_\xi = r\,C_1/\alpha$ und $w_\zeta = -r\,C_1$. Man erkennt, daß der hieraus resultierende Verschiebungszustand, da sich für den Steigungswinkel ω der Schraubenlinie $\operatorname{tg}\omega = h/2\,\pi\,r = \alpha$ ergibt, einer waagerechten Verschiebung des betrachteten Schraubenlinienpunktes entspricht. Durch C_1 wird also den Verschiebungen sämtlicher Schraubenlinienpunkte eine konstante, horizontale, in die Tangentialebene an den der Schraubenlinie einbeschriebenen Zylinder fallende Verschiebung

$$w_T = \frac{r\,C_1}{\alpha}\sqrt{1+\alpha^2}$$

überlagert, die nur durch eine verformungslose Drehung der gesamten Feder um den Winkel

$$\varphi_z = \frac{w_T}{r} = \frac{C_1}{\alpha}\sqrt{1+\alpha^2},$$

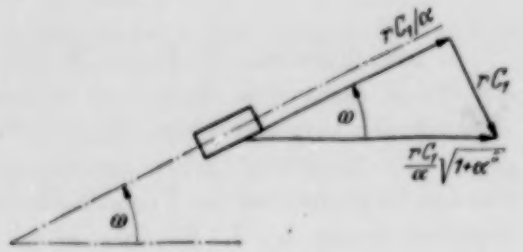

Abb. 7.

also durch die Drehungen

$$\varphi_\xi = \varphi_z\,e_z\,e_\xi = C_1 \qquad \text{und} \qquad \varphi_\zeta = \varphi_z\,e_z\,e_\zeta = \frac{C_1}{\alpha}$$

[vgl. auch (34a) und (34c)] verwirklicht werden kann. Durch C_1 wird also eine beliebige verformungslose Gesamtdrehung des Systems um die z-Achse beschrieben, so daß wir $C_1 = 0$ setzen können, wenn wir eine solche Drehung ausschließen wollen.

Mit $c\,w_{z_0}' = P$ folgt aus (33) für die Federkonstante einer Schraubenfeder

$$c = \frac{P}{w_{z_0}'} = \frac{E\,a^4}{8\,r^3\,n}\,\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}\left[1+\frac{\nu}{1+\alpha^2}+\frac{2}{3}\,\frac{1+\nu}{1+\alpha^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2+\frac{1}{4}\,\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]}. \tag{34}$$

Sie geht für den Fall sehr flacher Windungen ($\alpha = h/2\,\pi\,r \ll 1$) und für im Vergleich zum Windungshalbmesser r kleine Drahthalbmesser a in die bekannte Form[1]

$$C = \frac{E\,a^4}{8\,r^3\,n\,(1+\nu)} = \frac{G\,a^4}{4\,r^3\,n}$$

über.

(Eingegangen am 13. Februar 1957)

Anschrift des Verfassers: Priv.-Doz. Dr.-Ing. *Rudolf Trostel*, Lehrstuhl für Mechanik (Prof. Dr.-Ing. *Szabó*) der Technischen Universität, Berlin-Charlottenburg 2, Hardenbergstraße 34

[1] S. z. B. *I. Szabó*: Einführung in die Technische Mechanik, 2. Aufl. S. 137, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1956.

Free and Forced Vibrations of Straight Elastic Bars According to the "Method of Internal Constraints"

By **E. Volterra** and **E. C. Zachmanoglou**

1. Introduction. Professor *S. P. Timoshenko* in two well-known papers[1] has discussed the effects of transverse shear and of rotatory inertia on the natural frequency of lateral vibrations of a simply supported bar. He has shown that the correction for shear in the frequency equation is, in this particular case, about four times that due the rotatory inertia of the bar. The equation of motion first derived by *Timoshenko* has been used by *E. Goens*[2] to discuss lateral vibrations of a free-free beam, by *R. M. Davies*[3] to discuss lateral vibrations of a loaded fixed-free bar and by *E. T. Kruszewski*[4] to discuss lateral vibrations of a cantilever and of a free-free beam. *R. W. Traill-Nash* and *A. R. Collar*[5] have applied *Timoshenko's* analysis to derive frequency equations and modal functions for flexural vibrations of uniform beams in the more general cases of end conditions which can be derived by the various combinations of the three usual types of end supports.

In recent papers[6] the equations of motion for curved bars and curved and twisted bars have been derived taking into account the effects of shear and of rotatory inertia by applying the "Method of Internal Constraints". It has been shown how these equations can be solved in terms of the eigenvalues and of the eigenfunctions of the straight bars cases. It is the object of the present paper to discuss the problems of free and forced vibrations of straight bars of uniform cross-section taking into account the effects of shear and of rotatory inertia by applying the "Method of Internal Constraints".

The equations of motion for free vibrations derived in previous papers[6] for straight bars can be written under the following forms:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(1-\sigma)E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial x^2} - G\lambda_x - G\frac{\partial v_y}{\partial x} = r_z^2 \varrho \frac{\partial^2 \lambda_x}{\partial t^2}, \\ &G\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + G\frac{\partial \lambda_x}{\partial x} = \varrho \frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(1-\sigma)E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} r_y^2 \frac{\partial^2 \mu_x}{\partial x^2} - G\mu_x - G\frac{\partial v_z}{\partial x} = r_y^2 \varrho \frac{\partial^2 \mu_x}{\partial t^2}, \\ &G\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + G\frac{\partial \mu_x}{\partial x} = \varrho \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &G r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda_y}{\partial x^2} - (\lambda + 2G)\lambda_y - \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} - \lambda \mu_z = \varrho r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda_y}{\partial t^2}, \\ &G r_y^2 \frac{\partial^2 \mu_z}{\partial x^2} - (\lambda + 2G)\mu_z - \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} - \lambda \lambda_y = \varrho r_y^2 \frac{\partial^2 \mu_z}{\partial t^2}, \\ &(\lambda + 2G)\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial \lambda_y}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \mu_z}{\partial x} = \varrho \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &G r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda_z}{\partial x^2} - G\lambda_z - G\mu_y = \varrho r_z^2 \frac{\partial^2 \lambda_z}{\partial t^2}, \\ &G r_y^2 \frac{\partial^2 \mu_y}{\partial x^2} - G\mu_y - G\lambda_z = \varrho r_y^2 \frac{\partial^2 \mu_y}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

with the following boundary conditions at $x = 0$, $x = L$:

$$\left[\frac{\partial \lambda_x}{\partial x}\right]\delta\lambda_x = 0, \quad \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} + \lambda_x\right]\delta v_y = 0, \tag{5}$$

---

[1] *S. P. Timoshenko*, Philos. Mag. 41 (1921) p. 744 and 43 (1923) p. 125.
[2] *E. Goens*, Ann. Phys. 11 (1931) p. 649.
[3] *R. M. Davies*, Philos. Mag. 23 (1937) p. 653; id id id (id) p. 1129.
[4] *E. T. Kruszewski*, N. A. C. A.; T. N. 1909 (1949).
[5] *R. W. Traill-Nash* and *A. R. Collar*, Quarterly Journal of Mech. and Appl. Math. 6 (1953) p. 186.
[6] *E. Volterra*, Ing.-Arch. 23 (1955) p. 402; 24 (1956) p. 317 and p. 392.

$$\left[\frac{\partial \mu_x}{\partial x}\right]\delta\mu_x = 0\,, \quad \left[\frac{\partial v_z}{\partial x} + \mu_x\right]\delta v_z = 0\,, \tag{6}$$

$$\left[\frac{\partial \lambda_y}{\partial x}\right]\delta\lambda_y = 0\,, \quad \left[\frac{\partial \mu_z}{\partial x}\right]\delta\mu_z = 0\,, \quad \left[(\lambda + 2G)\frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda\lambda_y + \lambda\mu_z\right]\delta v_x = 0\,, \tag{7}$$

$$\left[\frac{\partial \mu_y}{\partial x}\right]\delta\mu_y = 0\,, \quad \left[\frac{\partial \lambda_z}{\partial x}\right]\delta\lambda_z = 0\,. \tag{8}$$

The above equations have been derived by assuming that during motion the components u, v, w of the elastic displacements are expressed under the following form:

$$\left.\begin{aligned} u(x, y, z; t) &= v_x(x, t) + y\,\lambda_x(x, t) + z\,\mu_x(x, t)\,,\\ v(x, y, z; t) &= v_y(x, t) + y\,\lambda_y(x, t) + z\,\mu_y(x, t)\,,\\ w(x, y, z; t) &= v_z(x, t) + y\,\lambda_z(x, t) + z\,\mu_z(x, t) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

v_x, v_y, v_z; λ_x, λ_y, λ_z, μ_x, μ_y, and μ_z being nine unknown functions of the variable x and of the time t, and by the application of *Hamilton*'s Principle. The bar is referred to a system of orthogonal cartesian coordinates 0, x, y, z, where x coincides with the axis of the bar, while y and z with the principal axes of inertia of the cross-section of the bar, λ is *Lame*'s constant and G is the modulus of rigidity of the material of the bar related to *Young*'s modulus E and to *Poisson*'s ratio σ by the relationships:

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\,, \qquad G = \frac{E}{2(1+\sigma)}\,.$$

While r_z, r_y are the radii of inertia of the cross-section of the bar with respect to the z and y axes and ϱ is the density of the material of the bar.

In the case of two-dimensional elasticity the equations which determine the four unknown functions λ_x, λ_y, v_x and v_y are

$$\left.\begin{aligned} \varrho\, r^2\frac{\partial^2\lambda_x}{\partial t^2} &= \frac{E}{(1-\sigma^2)}\,r^2\frac{\partial^2\lambda_x}{\partial x^2} - G\,\lambda_x - G\,\frac{\partial v_y}{\partial x}\,,\\ \varrho\,\frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} &= G\,\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + G\,\frac{\partial\lambda_x}{\partial x}\,, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} \varrho\,\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} &= \frac{E}{(1-\sigma^2)}\,\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{E\nu}{(1-\sigma^2)}\,\frac{\partial\lambda_y}{\partial x}\,,\\ \varrho\, r^2\,\frac{\partial^2\lambda_y}{\partial t^2} &= G\,\frac{\partial^2\lambda_y}{\partial x^2}\,r^2 - \frac{E}{(1-\sigma^2)}\,\lambda_y - \frac{E\sigma}{(1-\sigma^2)}\,\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

with the following boundary conditions at $x = 0$, $x = L$:

$$\left[\frac{\partial\lambda_x}{\partial x}\right]\delta\lambda_x = 0\,, \quad \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} + \lambda_x\right]\delta v_y = 0\,, \tag{12}$$

$$\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \sigma\lambda_y\right]\delta v_x = 0\,, \quad \left[\frac{\partial\lambda_y}{\partial x}\right]\delta\lambda_y = 0\,. \tag{13}$$

2. Lateral Eigenvibrations. In order to study lateral eigenvibrations of the bar, the method of separation of variables will be used. Let in equations (1), (2), (5) and (6)

$$\left.\begin{aligned} \lambda_x(x, t) &= X_1(x)\,f_1(t)\,, \quad \mu_x(x, t) = X_1(x)\,f_1(t)\,,\\ v_y(x, t) &= Y_1(x)\,f_1(t)\,, \quad v_z(x, t) = Y_1(x)\,f_1(t)\,. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Substituting equations (14) into equations (1) or (2) after changing r_z or r_y with r, one obtains

$$\left.\begin{aligned} \frac{\dfrac{(1-\sigma)E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\,r^2\,\dfrac{d^2X_1(x)}{dx^2} - G\,X_1(x) - G\,\dfrac{dY_1(x)}{dx}}{\varrho\, r^2\, X_1(x)} &= \frac{1}{f_1(t)}\,\frac{d^2 f_1(t)}{dt^2} = -\omega_1^2\,,\\ \frac{G\,\dfrac{d^2Y_1(x)}{dx^2} + G\,\dfrac{dX_1(x)}{dx}}{\varrho\, Y_1(x)} &= \frac{1}{f_1(t)}\,\frac{d^2 f_1(t)}{dt^2} = -\omega_1^2\,, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

and since the constant ω_1 is a real quantity[1], lateral eigenvibrations are defined by the following equations obtained from equations (15) and the corresponding boundary conditions:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 f_1(t)}{dt^2} + \omega_1^2 f_1(t) = 0\,, \\ &\frac{(1-\sigma)\,E}{(1+\sigma)\,(1-2\,\sigma)} r^2 \frac{d^2 X_1(x)}{dx^2} - G\,X_1(x) - G\,\frac{dY_1(x)}{dx} + \omega_1^2\,\varrho\,r^2\,X_1(x) = 0\,, \\ &G\,\frac{d^2 Y_1(x)}{dx^2} + G\,\frac{dX_1(x)}{dx} + \omega_1^2\,\varrho\,Y_1(x) = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{dX_1}{dx}\right] X_1 = 0\,, \\ &\left[\frac{dY_1}{dx} + X_1\right] Y_1 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ at } x = 0\,,\ x = L\,. \tag{17}$$

The eigenfunctions X_1 Y_1 satisfy the following orthogonality property[2]

$$\int_0^L (Y_{1n}\,Y_{1m} + r^2\,X_{1n}\,X_{1m})\,dx = 0 \quad \text{for } \omega_{1n} \neq \omega_{1m}\,. \tag{18}$$

By eliminating X_1 between the two last equations (16) the following equation in Y_1 is obtained:

$$\begin{aligned} &\frac{d^4 Y_1}{dx^4} + \frac{d^2 Y_1}{dx^2}\,\frac{\omega_1^2\,\varrho}{E}\left[\frac{E}{G} + \frac{(1+\sigma)\,(1-2\,\sigma)}{(1-\sigma)}\right] \\ &\quad - Y_1\,\frac{\omega_1^2\,\varrho}{E}\,\frac{1}{r^2}\left[\frac{(1+\sigma)\,(1-2\,\sigma)}{(1-\sigma)} + \frac{w_1^2\,\varrho}{E}\,\frac{E\,r^2}{G}\,\frac{(1+\sigma)\,(1-2\,\sigma)}{(1-\sigma)}\right] = 0\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Equation (19) can be written in non-dimensional form as follows:

$$\begin{aligned} &\frac{d^4\eta_1}{d\xi^4} + \frac{d^2\eta_1}{d\xi^2}\,\frac{\Phi^2}{\delta^2}\left[\alpha + \frac{(1+\sigma)\,(1-2\,\sigma)}{(1-\sigma)}\,\delta^2\right] \\ &\quad - \eta_1\,\frac{\Phi^2}{\delta^2}\,\frac{(1+\sigma)\,(1-2\,\sigma)}{(1-\sigma)}\left[1 - \frac{\Phi^2}{\delta^2}\,\alpha\,\delta^2\right] = 0\,. \end{aligned} \tag{20}$$

While equations (17) can be written under the following forms:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\ Y_1 = 0 \text{ [displacement zero] or } \eta_1 = 0\,, \\ &\text{b)}\ \frac{dY_1}{dx} = 0 \text{ [total slope zero] or } \frac{d\eta_1}{d\xi} = 0\,, \\ &\text{c)}\ X_1 = 0 \text{ [slope due to bending zero] or} \\ &\qquad \alpha\,\frac{d^3\eta_1}{d\xi^3} + \left[\frac{(1+\sigma)\,(1-2\,\sigma)}{(1-\sigma)} + \frac{\Phi^2}{\delta^2}\,\alpha^2\right]\frac{d\eta_1}{d\xi} = 0\,, \\ &\text{d)}\ \frac{dX_1}{dx} = 0 \text{ [moment zero] or} \\ &\qquad \frac{d^2\eta_1}{d\xi^2} + \frac{\Phi^2}{\delta^2}\,\alpha\,\eta_1 = 0\,, \\ &\text{e)}\ \frac{dY_1}{dx} + X_1 = 0 \text{ [shear zero] or} \\ &\qquad \frac{d^3\eta_1}{d\xi^3} + \frac{\Phi^2}{\delta^2}\left[\alpha + \frac{(1+\sigma)\,(1-2\,\sigma)}{(1-\sigma)}\,\delta^2\right]\frac{d\eta_1}{d\xi} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

---

[1] In fact from equations (15) and (5) the following relationship is derived:

$$\omega_1^2\,\varrho\left\{r^2\int_0^L [X_1(x)]^2\,dx + \int_0^L [Y_1(x)]^2\,dx\right\} = \frac{(1-\sigma)\,E}{(1+\sigma)\,(1-2\,\sigma)}\,r^2\int_0^L \left[\frac{dX_1(x)}{dx}\right]^2 dx + G\int_0^L \left[X_1(x) + \frac{dY_1(x)}{dx}\right]^2 dx\,.$$

[2] See: *E. Volterra*, Ing.-Arch. 24 (1956) p. 317.

In equations (20) and (21)

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{Y_1}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \Phi^2 = \frac{\omega^2 \varrho L^2}{E}, \\ \alpha &= 2(1+\sigma)\frac{r^2}{L^2}, \quad \delta^2 = \frac{r^2}{L^2}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

The quantities α and δ^2 in equation (20) are proportional respectively to the shear flexibility and rotatory inertia of the vibrating bar. If the shear flexibility, rotatory inertia and the quantity σ are neglected equation (20) reduces to the classical equation

$$\frac{d^4\eta_1}{d\xi^4} - \frac{\omega^2 \varrho L^2}{E}\frac{L^2}{r^2}\eta_1 = 0 .$$

By assuming the solution of equation (20) under the form

$$\eta_1 = C e^{\lambda \xi}$$

and substituting equations (23) into equation (20) the following characteristic equation is obtained:

$$\lambda^4 + \frac{\Phi^2}{\delta^2}\left[\alpha + \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)}\delta^2\right]\lambda^2 - \frac{\Phi^2}{\delta^2}\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)}\left(1 - \frac{\Phi^2}{\delta^2}\alpha\,\delta^2\right) = 0 . \tag{24}$$

Equation (24) can be written under the form

$$(\lambda^2 + \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_2^2) = 0 \tag{25}$$

the two roots λ_1^2 and λ_2^2 being

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^2 &= \Phi^2\frac{\left[\frac{\alpha}{\delta^2} + \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)}\right]}{2} + \sqrt{\Phi^4\left[\frac{\frac{\alpha}{\delta^2} - \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)}}{2}\right]^2 + \frac{\Phi^2}{\delta^2}\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)}}, \\ \lambda_2^2 &= -\Phi^2\frac{\left[\frac{\alpha}{\delta^2} + \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)}\right]}{2} + \sqrt{\Phi^4\left[\frac{\frac{\alpha}{\delta^2} - \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)}}{2}\right]^2 + \frac{\Phi^2}{\delta^2}\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)}}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

From the first of equations (26) it appears that λ_1^2 is a positive quantity.

From equations (26) one obtains the following relationship:

$$\lambda_1^2 \lambda_2^2 = \frac{\Phi^2}{\delta^2}\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)}(1 - \Phi^2\alpha) . \tag{27}$$

From equation (27) it descends that

$$\lambda_2^2 > 0 \quad \text{if} \quad \Phi^2\alpha < 1 , \tag{28}$$

$$\lambda_2^2 < 0 \quad \text{if} \quad \Phi^2\alpha > 1 . \tag{29}$$

The general solution of equation (20) will be

$$\eta_1(\xi) = C_1 \sin\lambda_1\xi + C_2\cos\lambda_1\xi + C_3\sinh\lambda_2\xi + C_4\cosh\lambda_2\xi \tag{30}$$

with the understanding that if conditions (29) instead of condition (28) is verified, the following substitution:

$$\pm\lambda_2 = \pm i\bar{\lambda}_2 \tag{31}$$

should be made into equation (30). The frequency equations and modal functions will be now derived for the following cases:

a) Simply Supported Bar. The boundary conditions are in this case:

at $\xi = 0$: $Y_1 = 0$, $\frac{dX_1}{dx} = 0$,

at $\xi = 1$: $Y_1 = 0$, $\frac{dX_1}{dx} = 0$

from which the frequency equation

$$\sin\lambda_1 \sinh\lambda_2 = 0$$

or

$$\lambda_{1k} = k\pi \quad \text{for} \quad \lambda_2^2 > 0 \tag{32}$$

and modal functions

$$\eta_{1k} = C_k \sin k\pi\xi \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{33}$$

follow.

b) Cantilever Bar. The boundary conditions are in this case[1]

$$\text{at} \qquad \xi = 0\,, \qquad Y_1 = 0\,, \qquad X_1 = 0\,,$$

$$\text{at} \qquad \xi = 1\,, \qquad \frac{dX_1}{dx} = 0\,, \qquad \frac{dY_1}{dx} + X_1 = 0$$

from which the frequency equation

$$2 + \left[2 + \frac{\Phi_k^2}{\delta^2}(\alpha - \delta^2)^2\right]\cos\lambda_{1k}\cosh\lambda_{2k} - \frac{\Phi_k^2}{\delta^2}(\alpha + \delta^2)\frac{\sin\lambda_{1k}\sinh\lambda_{2k}}{\lambda_{1k}\lambda_{2k}} = 0 \tag{34}$$

$$(k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

and modal functions

$$\begin{aligned}\eta_{1k} = C_k\Big\{&\left(\frac{\sin\lambda_{1k}}{\lambda_{1k}} - \frac{\sinh\lambda_{2k}}{\lambda_{2k}}\right)\left[\lambda_{1k}\left(\lambda_{2k}^2 + \frac{\Phi_k^2}{\delta^2}\alpha\right)\sin\lambda_{1k}\,\xi\right.\\ &\left. - \lambda_{2k}\left(\lambda_{1k}^2 - \frac{\Phi_k^2}{\delta^2}\alpha\right)\sinh\lambda_{2k}\,\xi\right] + \left[\left(\lambda_{2k}^2 + \frac{\Phi_k^2}{\delta^2}\alpha\right)\cos\lambda_{1k}\right.\\ &\left. + \left(\lambda_{1k}^2 - \frac{\Phi_k^2}{\delta^2}\alpha\right)\cosh\lambda_{2k}\right](\cos\lambda_{1k}\,\xi - \cosh\lambda_{2k}\,\xi)\Big\}\end{aligned} \tag{35}$$

follow.

c) Built-in Bar. In this and in the following cases the length L will be regarded as half the length of the whole bar. The appropriate boundary conditions for symmetric or antisymmetric modes will be specified at the center ($\xi = 0$) and at one end ($\xi = 1$) of the bar. In the case of a bar built-in at both ends the following boundary conditions have to be verified for symmetric modes:

$$\left.\begin{aligned}&\text{at} \qquad \xi = 0\text{:} \quad \frac{dY_1}{dx} = 0\,, \quad \frac{dY_1}{dx} + X_1 = 0\,,\\ &\text{at} \qquad \xi = 1\text{:} \quad Y_1 = 0\,, \quad X_1 = 0.\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

From equation (35) the frequency equation

$$\lambda_{1k}\left(\lambda_{2k}^2 + \frac{\Phi_k^2}{\delta^2}\alpha\right)\cos\lambda_{1k}\sinh\lambda_{2k} + \lambda_{2k}\left(\lambda_{1k}^2 - \frac{\Phi_k^2}{\delta^2}\alpha\right)\sin\lambda_{1k}\cosh\lambda_{2k} = 0 \tag{37}$$

$$(k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

and modal functions

$$\eta_k = C_k(\cosh\lambda_{2k}\cos\lambda_{1k}\,\xi - \cos\lambda_{1k}\cosh\lambda_{2k}\,\xi) \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{38}$$

follow.

For antisymmetric modes the following boundary conditions have to be verified:

$$\left.\begin{aligned}&\text{at} \qquad \xi = 0\text{:} \quad Y_1 = 0\,, \quad \frac{dX_1}{dx} = 0\,,\\ &\text{at} \qquad \xi = 1\text{:} \quad Y_1 = 0\,, \quad X_1 = 0\,.\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

From equations (39) the frequency equation

$$\lambda_{1k}\left(\lambda_{2k}^2 + \frac{\Phi_k^2}{\delta^2}\alpha\right)\sin\lambda_{1k}\cosh\lambda_{2k}\,\xi - \lambda_{2k}\left(\lambda_{1k}^2 - \frac{\Phi_k^2}{\delta^2}\alpha\right)\cos\lambda_{1k}\sinh\lambda_{2k} = 0 \tag{40}$$

and modal functions

$$\eta_k = C_k(\sinh\lambda_{2k}\sin\lambda_{1k}\,\xi - \sin\lambda_{1k}\sinh\lambda_{2k}\,\xi) \tag{41}$$

follow.

d) Free-Free Bar. For symmetric modes the following boundary conditions have to be verified:

$$\left.\begin{aligned}&\text{at} \qquad \xi = 0\text{:} \quad \frac{dY_1}{dx} = 0\,, \quad \frac{dY_1}{dx} + X_1 = 0\,,\\ &\text{at} \qquad \xi = 1\text{:} \quad \frac{dX_1}{dx} = 0\,, \quad \frac{dY_1}{dx} + X_1 = 0\,.\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

---

[1] It is supposed in this case that the fixed end of the bar be situated at $\xi = 0$, while the free end at $\xi = 1$.

From equations (42) the frequency equation

$$\lambda_{1k}\left(\lambda_{1k}^2 - \frac{\Phi_k^2}{\delta^2}\alpha\right)\cos\lambda_{1k}\sinh\lambda_{2k} + \lambda_{2k}\left(\lambda_{2k}^2 + \frac{\Phi_k^2}{\delta^2}\alpha\right)\sin\lambda_{1k}\cosh\lambda_{2k} = 0 \tag{43}$$

and modal functions

$$\eta_k = C_k\left(\lambda_{1k}\sinh\lambda_{2k}\cos\lambda_{1k}\,\xi - \lambda_{2k}\sin\lambda_{1k}\cosh\lambda_{2k}\xi\right) \tag{44}$$

follow.

For antisymmetric modes the following boundary conditions have to be verified:

$$\left.\begin{aligned} &\text{at} \quad \xi = 0: \quad Y_1 = 0\,, \quad \frac{dX_1}{dx} = 0\,, \\ &\text{at} \quad \xi = 1: \quad \frac{dX_1}{dx} = 0\,, \quad \frac{dY_1}{dx} + X_1 = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

From equations (45) the frequency equation

$$\lambda_{1k}\left(\lambda_{1k}^2 - \frac{\Phi_k^2}{\delta^2}\alpha\right)\sin\lambda_{1k}\cosh\lambda_{2k} - \lambda_{2k}\left(\lambda_{2k}^2 + \frac{\Phi_k^2}{\delta^2}\alpha\right)\cos\lambda_{1k}\sinh\lambda_{2k} = 0 \tag{45 a}$$

and modal functions

$$\eta_k = C_k\left(\lambda_{1k}\cos h\,\lambda_{2k}\sin\lambda_{1k}\,\xi + \lambda_{2k}\cos\lambda_{1k}\sin h\,\lambda_{2k}\,\xi\right) \tag{46}$$

follow.

e) Bar Built-in at One End and Simply Supported at the Other. If L represents the whole length of the bar the frequency equation and modal functions for this case are the same as those of the antisymmetric modes of the bar with both ends built-in which have been dealt previously [see section c) of this paragraph]. The frequency equations and modal functions which have been derived apply to lateral vibrations in the three-dimensional case [equations (1), (2), (5), (6)].

In the case of lateral vibrations in two-dimensional elasticity [equations (10) and (12)] the same expressions for frequency equations and modal functions are valid, but the following changes have to be introduced:

1. Instead of the constant $\frac{(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$ the constant $\frac{1}{(1-\sigma^2)}$ has to be introduced in the formulae.

2. The roots λ_{1k}^2 and λ_{2k}^2 of the characteristic equation are given by the following formulae:

$$\lambda_{1k}^2 = \frac{1}{2}\Phi_k^2\left(\frac{\alpha}{\delta^2} + (1-\sigma^2)\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\Phi_k^4\left[\frac{\alpha}{\delta^2} - (1-\sigma^2)\right]^2 + \frac{\Phi_k^2}{\delta^2}(1-\sigma^2)}\,,$$

$$\lambda_{2k}^2 = -\frac{1}{2}\Phi_k^2\left(\frac{\alpha}{\delta^2} + (1-\sigma^2)\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\Phi_k^4\left[\frac{\alpha}{\delta^2} - (1-\sigma^2)\right]^2 + \frac{\Phi_k^2}{\delta^2}(1-\sigma^2)}\,.$$

3. Lateral Forced Vibrations. By introducting into the variational principle the work done by the external forces the equations of motion are obtained in the case of forced vibrations. In the case of lateral vibrations equations (1) and (2) transform into the following equations:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(1-\sigma)E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}r_z^2\frac{\partial^2\lambda_x}{\partial x^2} - G\lambda_x - G\frac{dv_y}{dx} = \varrho\, r_z^2\frac{\partial^2\lambda_x}{\partial t^2}\,, \\ &G\frac{d^2v_y}{dx^2} + G\frac{\partial\lambda_x}{\partial x} = \varrho\frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} - \frac{p_y(x,t)}{A}\,, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(1-\sigma)E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}r_y^2\frac{\partial^2\mu_x}{\partial x^2} - G\mu_x - G\frac{\partial v_z}{\partial x} = \varrho\, r_y^2\frac{\partial^2\mu_x}{\partial t^2}\,, \\ &G\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + G\frac{\partial\mu_x}{\partial x} = \varrho\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} - \frac{p_z(x,t)}{A} \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

where $p_y(x,t)$ and $p_z(x,t)$ represent respectively the external forces per unit length of the bar acting in the direction of the y and z axis. A represent the cross-section area of the bar. Let

$$\left.\begin{aligned} \lambda_x(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} X_{1k}(x)\, f_{1k}(t)\,, \quad \mu_x(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_{1k}(x)\, f_{1k}(t)\,, \\ \nu_y(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} Y_{1k}(x)\, f_{1k}(t)\,, \quad \nu_z(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_{1k}(x)\, f_{1k}(t) \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

where the functions $X_{1k}(x)$, $Y_{1k}(x)$ are the solutions of the differential equations

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(1-\sigma)\,E}{(1+\sigma)\,(1-2\,\sigma)}\, r^2\, \frac{d^2X_1}{dx^2} - G\,X_1 - G\,\frac{dY_1}{dx} = -\varrho\, r^2\, \omega^2\, X_1\,, \\ &G\,\frac{d^2Y_1}{dx^2} + G\,\frac{dX_1}{dx} = -\varrho\,\omega^2\, Y, \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

which satisfy also the usual homogeneous boundary conditions to which the functions $\lambda_x(x,t)$, $\nu_y(x,t)$ and $\mu_x(x,t)$ and $\nu_z(x,t)$ are subjected. Then, there exists an infinite sequence of characteristic values of ω:

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \cdots < \omega_k < \cdots < \omega_n \cdots \ (\omega_n \to \infty \ \text{ as } \ n \to \infty)$$

to which correspond the non trivial solutions

$$\begin{aligned} &X_{11}(x)\,, \quad X_{12}(x)\,, \quad X_{13}(x)\,, \ldots\,, \quad X_{1k}(x)\,, \ldots\,, \quad X_{1n}(x)\,\ldots\,, \\ &Y_{11}(x)\,, \quad Y_{12}(x)\,, \quad Y_{13}(x)\,, \ldots\,, \quad Y_{1k}(x)\,, \ldots\,, \quad Y_{1n}(x)\,\ldots\,. \end{aligned}$$

Upon normalization of the eigenfunctions $X_{1k}(x)$, $Y_{1k}(x)$ which represent the normal modes of vibration of the system one has:

$$\frac{1}{L^3}\int_0^L [Y_{1k}(x)\,Y_{1k'}(x) + r^2\,X_{1k}(x)\,X_{1k'}(x)]\,dx = \begin{cases} 0 & \text{for } k \neq k'\,, \\ 1 & \text{for } k = k'\,. \end{cases} \tag{51}$$

Substituting equations (49) into equations (47) or (48) one reaches the equations

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(1-\sigma)\,E}{(1+\sigma)\,(1-2\,\sigma)}\, r^2\, \frac{d^2X_{1k}(x)}{dx^2} - G\,X_{1k}(x) - G\,\frac{dY_{1k}(x)}{dx}\right] f_{1k}(t) = \varrho\, r^2 \sum_{k=1}^{\infty} X_{1k}(x)\,\frac{d^2f_{1k}(t)}{dt^2}\,, \\ &\sum_{k=1}^{\infty}\left[G\,\frac{d^2Y_{1k}(x)}{dx^2} + G\,\frac{dX_{1k}(x)}{dx}\right] f_{1k}(t) = \varrho \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2f_{1k}(t)}{dt^2}\, Y_{1k}(x) - \frac{p(x,t)}{A} \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

and in view of equations (50) equations (52) become

$$\left.\begin{aligned} r^2 \sum_{k=1}^{\infty} X_{1k}(x)\,\frac{d^2f_{1k}(t)}{dt^2} &= -\,r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{1k}^2\, X_{1k}(x)\, f_{1k}(t)\,, \\ \sum_{k=1}^{\infty} Y_{1k}(x)\,\frac{d^2f_{1k}(t)}{dt^2} - \frac{p(x,t)}{A\,\varrho} &= -\sum_{k=1}^{\infty} \omega_{1k}^2\, Y_{1k}(x)\, f_{1k}(t)\,. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Multiplying the first of equations (53) by $X_{1k}(x)dx$, integrating between 0 and L, multiplying the second by $Y_{1k}(x)dx$ and integrating between 0 and L adding subsequently the two equations together, by virtue of the orthogonality relations (51) one is lead to the following equations:

$$\frac{d^2f_{1k}(t)}{dt^2} + \omega_{1k}^2\, f_{1k}(t) = Q_{1k}(t) = \frac{1}{\varrho\, A\, L^3}\int_0^L p(x,t)\; Y_{1k}(x)\,dx\,. \tag{54}$$

The problem of determining the response to the system of the external applied force is therefore reduced to that of finding the particular solution satisfying equation (54) and conforming to the initial conditions. In the same way the problem of longitudinal forced vibrations can be solved.

4. Longitudinal Eigenvibrations. In the case of longitudinal vibrations expressed by equations (3) and (7), let

$$\left.\begin{aligned} \nu_x(x,t) &= X_2(x)\, f_2(t)\,, \\ \lambda_y(x,t) &= Y_2(x)\, f_2(t)\,, \\ \mu_z(x,t) &= Z_2(x)\, f_2(t)\,. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Substituting equations (55) into equations (3), one obtains

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{G\,r_z^2\,\frac{d^2Y_2(x)}{dx^2}-(\lambda+2G)\,Y_2(x)-\lambda\,\frac{dX_2(x)}{dx}-\lambda\,Z_2(x)}{\varrho\,r_z^2\,Y_2(x)}=\frac{1}{f_2(t)}\frac{d^2f_2(t)}{dt^2}=-\omega_2^2,\\
&\frac{G\,r_y^2\,\frac{d^2Z_2(x)}{dx^2}-(\lambda+2G)\,Z_2(x)-\lambda\,\frac{dX_2(x)}{dx}-\lambda\,Y_2(x)}{\varrho\,r_y^2\,Z_2(x)}=\frac{1}{f_2(t)}\frac{d^2f_2(t)}{dt^2}=-\omega_2^2,\\
&\frac{(\lambda+2G)\,\frac{d^2X_2(x)}{dx^2}+\lambda\,\frac{dY_2(x)}{dx}+\lambda\,\frac{dZ_2(x)}{dx}}{\varrho\,X_2(x)}=\frac{1}{f_2(t)}\frac{d^2f_2(t)}{dt^2}=-\omega_2^2.
\end{aligned}\right\}\tag{56}$$

Since the constant ω_2 is a real quantity[1], the longitudinal eigenvibrations are defined by the following equations which descend from equations (56) and the boundary conditions (7):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2f_2(t)}{dt^2}+\omega_2^2 f_2(t)=0,\\
&G\,r_z^2\frac{d^2Y_2(x)}{dx^2}-(\lambda+2G)\,Y_2(x)-\lambda\frac{dX_2(x)}{dx}-\lambda\,Z_2(x)+\omega_2^2\varrho\,r_z^2\,Y_2(x)=0,\\
&G\,r_y^2\frac{d^2Z_2(x)}{dx^2}-(\lambda+2G)\,Z_2(x)-\lambda\frac{dX_2(x)}{dx}-\lambda\,Y_2(x)+\omega_2^2\varrho\,r_y^2\,Z_2(x)=0,\\
&(\lambda+2G)\frac{d^2X_2(x)}{dx^2}+\lambda\frac{dY_2(x)}{dx}+\lambda\frac{dZ_2(x)}{dx}+\omega_2^2\varrho\,X_2(x)=0,
\end{aligned}\right\}\tag{57}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{dY_2}{dx}\right]Y_2=0,\\
&\left[\frac{dZ_2}{dx}\right]Z_2=0,\\
&\left[(\lambda+2G)\frac{dX_2}{dx}+\lambda\,Y_2+\lambda\,Z_2\right]X_2=0.
\end{aligned}\right\}\quad at\ x=0,\ x=L.\tag{58}$$

The equations of motion (57) together with the boundary conditions (58) are satisfied for a triple set of discrete eigenfrequencies ω_{2k} to each of which corresponds a fundamental mode given by the eigenfunctions X_{2k}, Y_{2k}, and Z_{2k}. From equations (57) and (58) the following orthogonality property for the eigenfunctions $X_2(x)$, $Y_2(x)$, $Z_2(x)$ can be derived:[2]

$$\int_0^L [X_{2n}(x)\,X_{2n'}(x)+r_z^2\,Y_{2n}(x)\,Y_{2n'}(x)+r_y^2\,Z_{2n'}(x)\,Z_{2n}(x)]\,dx=0\quad\text{for }\omega_{2n}\neq\omega_{2n'},\tag{59}$$

where $X_{2n}(x)$, $Y_{2n}(x)$, $Z_{2n}(x)$ are the eigenfunctions corresponding to the eigenvalue ω_{2n}.

If the bar has a circular cross-section equations (3) and (7) reduce to the following equations of motion and boundary conditions[2]:

$$\left.\begin{aligned}
&G\,r^2\frac{d^2\lambda_r}{dx^2}-\frac{E}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}\dot{\lambda}_r-\frac{\sigma E}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}\frac{dv_x}{dx}=\varrho\,r^2\frac{d^2\lambda_r}{dt^2},\\
&\frac{(1-\sigma)E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{d^2v_x}{dx^2}+\frac{2\,v\,E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{d\lambda_r}{dx}=\varrho\frac{d^2v_x}{dx^2},
\end{aligned}\right\}\tag{60}$$

---

[1] In fact from equations (56) and (7) the following relationship is derived:

$$\varrho\,\omega_2^2\left\{r_z^2\int_0^L[Y_2(x)]^2\,dx+r_y^2\int_0^L[Z_2(x)]^2\,dx+\int_0^L[X_2(x)]^2\,dx\right\}=G\,r_z^2\int_0^L\left[\frac{dY_2(x)}{dx}\right]^2dx+G\,r_y^2\int_0^L\left[\frac{dZ_2(x)}{dx}\right]^2dx$$
$$+2\,G\int_0^L\left[Y_2^2(x)+Z_2^2(x)+\left(\frac{dX_2(x)}{dx}\right)^2\right]dx+\lambda\int_0^L\left[Y_2(x)+Z_2(x)+\frac{dX_2(x)}{dx}\right]^2dx.$$

[2] See: *E. Volterra*, Ing.-Arch. 23 (1955) p. 410.

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{\partial \lambda_r}{\partial x}\right] \delta\lambda_r = 0\,, \\ &\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2\sigma}{(1-\sigma)}\lambda_z\right] \delta v_x = 0 \end{aligned}\right\} \text{ at } x = 0\,,\quad x = L\,. \tag{61}$$

Let

$$v_x(x,t) = X(x)\,f(t)\,, \qquad \lambda_r(x,t) = R(x)\,f(t)\,. \tag{62}$$

Substituting equations (62) into equations (60) and (61), one obtains

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \omega^2 f(t) = 0\,, \\ &G\,r^2\,\frac{d^2R(x)}{dx^2} - \frac{E}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}\,R(x) - \frac{\sigma E}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}\,\frac{dX(x)}{dx} + \varrho\,\omega^2\,r^2\,R(x) = 0\,, \\ &\frac{(1-\sigma)E}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}\,\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{2\sigma E}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}\,\frac{dR(x)}{dx} + \varrho\,\omega^2\,X(x) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

and

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{dR}{dx}\right] R = 0\,, \\ &\left[\frac{dX}{dx} + \frac{2\sigma}{(1-\sigma)}\,R\right] X = 0 \end{aligned}\right\} \text{ at } \quad x = 0\,,\quad x = L\,. \tag{64}$$

By eliminating $R(x)$ between the last equations (63) the following equation in $X(x)$ is obtained:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{\varrho\,\omega^2}{E}\,X(x)\,, \\ &-(1+\sigma)(1-2\sigma)\left(\frac{\varrho\,\omega^2}{E}\right) r^2\,X(x) - (1-\sigma)\left(\frac{\omega^2\,\varrho}{E}\right) r^2\,\frac{d^2X(x)}{dx^2}\,, \\ &-(1+\sigma)(1-2\sigma)\left(\frac{\varrho\,\omega^2}{E}\right)\frac{G\,r^2}{E}\,\frac{d^2X(x)}{dx^2} - (1-\sigma)\,\frac{G\,r^2}{E}\,\frac{d^4X(x)}{dx^4} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

The first two terms of equation (65) are the classical terms, while the second and third lines represent the terms due to radial shear and to radial inertia respectively.

Equation (65) can be written in non-dimensional form as follows:

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{d^4\eta}{d\xi^4}(1-v)\,\frac{\delta^4}{\alpha} + \frac{d^2\eta}{d\xi^2}\left[1 - (1-v)\,\Phi^2\,\delta^2 - (1+v)(1-2v)\,\Phi^2\,\frac{\delta^4}{\alpha}\right] \\ &\qquad + \eta\,[\Phi^2 - (1+v)(1-2v)\,\Phi^4\,\delta^2] = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

In equation (66) the terms containing δ^4/α are the terms due to radial shear, while the terms containing δ^2 are the terms due to radial inertia. If these terms are neglected equation (66) reduces to the classical form

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \Phi^2\,\eta = 0\,.$$

Equations (64) expressing the boundary conditions can be written in non-dimensional form as follows:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\ X = 0 \quad \text{or} \quad \eta = 0\,, \\ &\text{b)}\ R = 0 \quad \text{or} \quad \frac{d^3\eta}{d\xi^3} + \left[\Phi^2\,\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)} + \frac{2\sigma^2}{(1-2\sigma)(1+\sigma)(1-\sigma)}\,\frac{\alpha}{\delta^4}\right]\frac{d\eta}{d\xi} = 0\,, \\ &\text{c)}\ \frac{dR}{dx} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \Phi^2\,\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)}\,\eta = 0\,, \\ &\text{d)}\ \frac{dX}{dx} + \frac{2\sigma}{(1-\sigma)}\,R = 0 \quad \text{or} \quad \frac{d^3\eta}{d\xi^3} + \left\{\Phi^2\left[\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)} + \frac{\alpha}{\delta^2}\right] - \frac{1}{(1-\sigma)}\,\frac{\alpha}{\delta^4}\right\}\frac{d\eta}{d\xi} = 0\,, \\ &\text{e)}\ \frac{dX}{dx} \quad \text{or} \quad \frac{d\eta}{d\xi} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

In equations (66) and (67)

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \frac{X}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \Phi^2 = \frac{\omega^2 \varrho L^2}{E}, \\ \alpha &= \frac{E r^2}{G L^2}, \quad \delta^2 = \frac{r^2}{L^2}. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

By assuming the solution of equation (66) under the form

$$\eta = C e^{\lambda \xi} \tag{69}$$

and substituting equation (69) into equation (66) the following characteristic equation is obtained:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^4 - \lambda^2 \left\{ \frac{1}{(1-\sigma)} \frac{\alpha}{\delta^4} - \Phi^2 \left[\frac{\alpha}{\delta^2} + \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)} \right] \right\} \\ - \Phi^2 \left\{ \frac{1}{(1-\sigma)} \frac{\alpha}{\delta^4} - \Phi^2 \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)} \frac{\alpha}{\delta^2} \right\} = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Equation (70) can be written under the form

$$(\lambda^2 + \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_2^2) = 0 \tag{71}$$

the two roots λ_1^2 and λ_2^2 being:

$$\lambda_1^2 = -A + B, \qquad \lambda_2^2 = +A + B, \tag{72}$$

where:

$$A = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(1-\sigma)} \frac{\alpha}{\delta^4} - \Phi^2 \left[\frac{\alpha}{\delta^2} + \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)} \right] \right\},$$

$$B = \sqrt{\frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{(1-\sigma)} \frac{\alpha}{\delta^4} - \Phi^2 \left[\frac{\alpha}{\delta^2} + \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)} \right] \right\}^2 + \Phi^2 \left[\frac{1}{(1-\sigma)} \frac{\alpha}{\delta^4} - \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)} \frac{\alpha}{\delta^2} \Phi^2 \right]}.$$

From equations (72) it descends that

$$\left.\begin{aligned} &\text{if} \quad \frac{1}{(1-\sigma)} \frac{\alpha}{\delta^4} > \Phi^2 \left[\frac{\alpha}{\delta^2} + \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)} \right] > \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)} \frac{\alpha}{\delta^2} \Phi^2 \\ &\text{then} \quad \lambda_1^2 > 0, \quad \lambda_2^2 > 0, \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{if} \quad \Phi^2 \left[\frac{\alpha}{\delta^2} + \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)} \right] > \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)} \frac{\alpha}{\delta^2} \Phi^2 > \frac{1}{(1-\sigma)} \frac{\alpha}{\delta^4} \\ &\text{then} \quad \lambda_1^2 > 0, \quad \lambda_2^2 < 0. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

The general solution of equation (66) will be

$$\eta(\xi) = C_1 \sin \lambda_1 \xi + C_2 \cos \lambda_1 \xi + C_3 \sinh \lambda_2 \xi + C_4 \cosh \lambda_2 \xi \tag{75}$$

with the understanding that if condition (74) instead of condition (73) is verified, the following substitution:

$$\pm \lambda_2 = \pm i \bar{\lambda}_2 \tag{76}$$

should be made into equation (75).

The frequency equations and modal functions will be now derived for the following cases:

a) Pinned end Bar. The boundary conditions are in this case

$$\text{at} \quad \xi = 0: \quad X = 0, \quad \frac{dR}{dx} = 0,$$

$$\text{at} \quad \xi = 1: \quad X = 0, \quad \frac{dR}{dx} = 0$$

from which the frequency equation

$$\sin \lambda_1 \sinh \lambda_2 = 0$$

$$\text{or} \quad \lambda_{1k} = k\pi \quad \text{for} \quad \lambda_2^2 > 0 \tag{77}$$

and modal functions

$$\eta_k = C_k \sin k \pi \xi \tag{78}$$

follow.

b) Cantilever Bar.

The boundary conditions are in this case[1]:

at $\xi = 0$: $X = 0$, $R = 0$,

at $\xi = 1$: $\frac{dR}{dx} = 0$, $\frac{dX}{dx} + \frac{2\sigma}{(1-\sigma)} R = 0$

from which the frequency equation

$$\left.\begin{aligned} 2 + \left[\frac{(1-\sigma)\lambda_{2k}^2 + (1+\sigma)(1-2\sigma)\Phi_k^2}{(1-\sigma)\lambda_{1k}^2 - (1+\sigma)(1-2\sigma)\Phi_k^2} + \frac{(1-\sigma)\lambda_{1k}^2 - (1+\sigma)(1-2\sigma)\Phi_k^2}{(1-\sigma)\lambda_{2k}^2 + (1+\sigma)(1-2\sigma)\Phi_k^2}\right] \cos\lambda_{1k}\cosh\lambda_{2k} \\ - \frac{\lambda_{1k}^2 - \lambda_{2k}^2}{\lambda_{1k}\lambda_{2k}} \sin\lambda_{1k}\sinh\lambda_{2k} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (79)$$

and modal functions

$$\left.\begin{aligned} \eta_k = C_k \left\{\left(\frac{\sin\lambda_{1k}}{\lambda_{1k}} - \frac{\sinh\lambda_{2k}}{\lambda_{2k}}\right)\left[\lambda_{1k}\left(\lambda_{2k}^2 + \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)}\Phi_k^2\right)\sin\lambda_{1k}\xi\right.\right. \\ - \lambda_{2k}\left(\lambda_{1k}^2 - \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)}\Phi_k^2\right)\sinh\lambda_{2k}\xi\Big] + \Big[\left(\lambda_{2k}^2 + \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)}\Phi_k^2\right)\cos\lambda_{1k} \\ \left.\left. + \left(\lambda_{1k}^2 - \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)}\Phi_k^2\right)\cosh\lambda_{2k}\Big](\cos\lambda_{1k} - \cosh\lambda_{2k}\xi)\right\} \end{aligned}\right\} \quad (80)$$

follow.

c) Built-in Bar.

In this and in the following cases the length L will be regarded as half the lenth of the whole bar. The appropriate boundary conditions for symmetric or anti-symmetric modes will be specified at the center $\xi = 0$ and at one end $\xi = 1$ of the bar. In the case of a bar built-in at both ends the following boundary conditions have to be verified for symmetric modes:

at $\xi = 0$: $\frac{dX}{dx} = 0$, $\frac{dX}{dx} + \frac{2\sigma}{(1-\sigma)} R = 0$,

at $\xi = 1$: $X = 0$, $R = 0$

from which the frequency equation

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{1k}\left[\lambda_{2k}^2 + \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)}\Phi_k^2\right]\cos\lambda_{1k}\sinh\lambda_{2k} \\ + \lambda_{2k}\left[\lambda_{1k}^2 - \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)}\Phi_k^2\right]\sin\lambda_{1k}\cosh\lambda_{2k} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

and modal functions

$$\eta_k = C_k(\cosh\lambda_{2k}\cos\lambda_{1k}\xi - \cos\lambda_{1k}\cosh\lambda_{2k}\xi) \quad (82)$$

follow.

For antisymmetric modes the following boundary conditions have to be verified:

at $\xi = 0$: $X = 0$, $\frac{dR}{dx} = 0$,

at $\xi = 1$: $X = 0$, $R = 0$

from which the frequency equation

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{1k}\left[\lambda_{2k}^2 + \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)}\Phi_k^2\right]\sin\lambda_{1k}\cosh\lambda_{2k} \\ - \lambda_{2k}\left[\lambda_{1k}^2 - \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)}\Phi_k^2\right[\cos\lambda_{1k}\sinh\lambda_{2k} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (83)$$

and modal functions

$$\eta_k = C_k(\sin h\,\lambda_{2k}\sin\lambda_{1k}\xi - \sin\lambda_{1k}\sin h\,\lambda_{2k}\xi) \quad (84)$$

follow.

[1] It is supposed in this case that the fixed end of the bar be situated at $\xi = 0$, while the free end at $\xi = 1$.

d) Free-Free Bar.

For symmetric modes the following boundary conditions have to be verified:

at $\xi = 0$: $\frac{dX}{dx} = 0$, $\frac{dX}{dx} + \frac{2\sigma}{(1-\sigma)} R = 0$,

at $\xi = 1$: $\frac{dR}{dx} = 0$, $\frac{dX}{dx} + \frac{2\sigma}{(1-\sigma)} R = 0$

from which the frequency equation

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{2k}\left[\lambda_{2k}^2 + \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)}\Phi_k^2\right]\sin\lambda_{1k}\cosh\lambda_{2k} \\ + \lambda_{1k}\left[\lambda_{1k}^2 - \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)}\Phi_k^2\right]\cos\lambda_{1k}\sinh\lambda_{2k} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

and modal functions

$$\eta_k = C_k\,(\lambda_{1k}\sinh\lambda_{2k}\cos\lambda_{1k}\xi - \lambda_{2k}\sin\lambda_{1k}\cosh\lambda_{2k}\xi) \tag{86}$$

follow.

For antisymmetric modes the following boundary conditions have to be verified:

at $\xi = 0$: $X = 0$, $\frac{dR}{dx} = 0$,

at $\xi = 1$: $\frac{dR}{dx} = 0$, $\frac{dX}{dx} + \frac{2\sigma}{(1-\sigma)} R = 0$

from which the frequency equation

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{1k}\left[\lambda_{1k}^2 - \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)}\Phi_k^2\right]\sin\lambda_{1k}\cosh\lambda_{2k} \\ - \lambda_{2k}\left[\lambda_{2k}^2 + \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)}\Phi_k^2\right]\cos\lambda_{1k}\sinh\lambda_{2k} \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

and modal functions

$$\eta_k = C_k\,(\lambda_{2k}\cos\lambda_{1k}\sinh\lambda_{2k}\xi + \lambda_{1k}\cosh\lambda_{2k}\sin\lambda_{1k}\xi) \tag{88}$$

follow.

e) Bar built-in at one end and pinned at the other.

If L represents the whole length of the bar the frequency equation and modal functions for this case are the same as those of the antisymmetric modes of the bar with both ends built-in which have been dealt with previously [see section c) of this paragraph]. The frequency equations and modal functions which have been derived apply to longitudinal vibrations of a bar of circular cross-section according to equations (60) and (61).

In the case of longitudinal vibrations in two-dimensional elasticity [equations (11) and (13)] the same expressions for frequency equations and modal functions are valid, but the following changes have to be introduced:

1. Instead of the constant $\frac{(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$ the constant $\frac{1}{(1-\sigma^2)}$ has to be introduced in the formulae.

2. The roots λ_1^2 and λ_2^2 of the characteristic equation are given by the following formulae:

$$\lambda_1^2 = -A + B\,, \qquad \lambda_2^2 = +A + B\,, \tag{89}$$

where

$$A = \frac{1}{2}\left\{\frac{\alpha}{\delta^4} - \Phi^2\left[\frac{\alpha}{\delta^2} + 1 - \sigma^2)\right]\right\},$$

$$B = \sqrt{\frac{1}{4}\left\{\frac{\alpha}{\delta^4} - \Phi^2\left[\frac{\alpha}{\delta^2} + (1-\sigma^2)\right]\right\}^2 + \left[\frac{\alpha}{\delta^4} - \Phi^2\,\frac{\alpha}{\delta^2}\,(1-\sigma^2)\right]}\,.$$

5. Torsional Vibrations. In the case of torsional vibrations expressed by equations (4) and (8), let

$$\mu_y(x,t) = T(x)\,f_2(t)\,, \qquad \lambda_z(x,t) = t(x)\,f_2(t)\,. \tag{90}$$

Substituting equations (90) into equations (4), one obtains

$$\left.\begin{aligned} \frac{G\,r_z^2\,\frac{dt^2(x)}{dx^2} - G\,t(x) - G\,T(x)}{\varrho\,r_z^2\,t(x)} &= \frac{1}{f_2(t)}\,\frac{d^2 f_2(t)}{dt^2} = -\omega_2^2\,, \\ \frac{G\,r_y^2\,\frac{d^2T(x)}{dx^2} - GT(x) - G\,t(x)}{\varrho\,r_y^2\,T(x)} &= \frac{1}{f_2(t)}\,\frac{d^2 f_2(t)}{dt^2} = -\omega_2^2 \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

and since the constant ω_2 is a real quantity[1] the torsional eigenvibrations are defined by the following equations which are deduced from equations (91) and the corresponding boundary equations (8):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 f_2(t)}{dt^2} + \omega_2^2 f_2(t) = 0\,, \\ &G\,r_z^2\,\frac{d^2 t(x)}{dx^2} - G\,t(x) - G\,T(x) + \varrho\,\omega_2^2\,r_z^2\,t(x) = 0\,, \\ &G\,r_y^2\,\frac{d^2\,T(x)}{dx^2} - G\,T(x) - G\,t(x) + \varrho\,\omega_2^2\,r_y^2\,T(x) = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{dT}{dx}\right] T = 0\,, \\ &\left[\frac{dt}{dx}\right] t = 0 \end{aligned}\right\} \text{ at } x = 0\,, \quad x = L\,. \tag{93}$$

The eigenfunctions $T(x)$, $t(x)$ satisfy the following orthogonality property:

$$\int_0^L [r_z^2\,t_m(x)\,t_n(x) + r_y^2\,T_m(x)\,T_n(x)]\,dx = 0 \quad \text{for} \quad \omega_{2n} \neq \omega_{2m}\,. \tag{94}$$

In the particular case in which the cross-section of the bar is circular, the following conditions are satisfied[2]:

$$r_y = r_z = r\,, \quad -\mu_y = \lambda_z\,, \quad t(x) = -\,T(x)$$

and equations (92) and (93) reduce to the equations of the Classical Theory

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 f_2(t)}{dt^2} + \omega_2^2 f_2(t) = 0\,, \\ &G\,\frac{d^2 T(x)}{dX^2} + \varrho\,\omega_2^2\,T(x) = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

$$\left[\frac{dT}{dx}\right] T = 0 \quad \text{at} \quad x = 0\,, \quad x = L\,. \tag{96}$$

The material presented in the paper is based on an investigation conducted at the Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, N. Y, under the sponsorship of the Office of Ordnance Research, Contract No, DA-30-115-ORD-709. Project No. 454.13.

(Eingegangen am 16. Dezember 1956.)

Anschriften der Verfasser: Prof. *E. Volterra*, Troy N. Y. (USA) 1567 Tibbits Ave;
E. C. Zachmanoglou, Troy N.Y. (USA)

---

[1] In fact from equations (91) and (8) the following relationship is derived:

$$w_2^2\,\varrho\left\{r_y^2\int_0^L [T(x)]^2\,dx + r_z^2\int_0^L [t(x)]^2\,dx\right\} = G\,r_z^2\int_0^L \left[\frac{dt(x)}{dx}\right]^2 dx + G\,r_y^2\int_0^L \left[\frac{dT(x)}{dx}\right]^2 dx + G\int_0^L [T(x) + t(x)]^2\,dx\,.$$

[2] See: *E. Volterra*, Ing.-Arch. 23 (1955) p. 410.